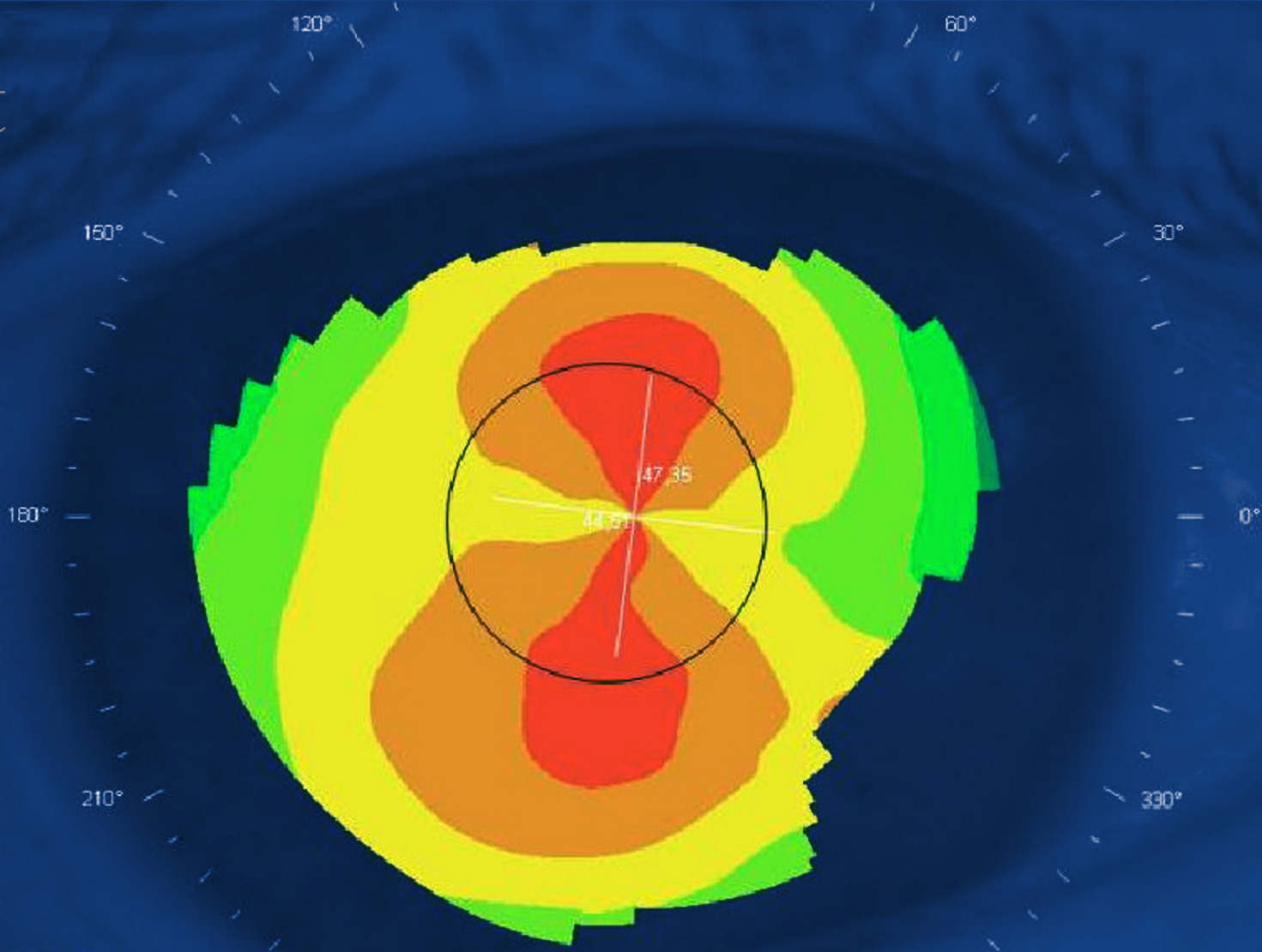


ROBERTO CARNEVALI

# Le aberrazioni ottiche



FABIANO EDITORE

Roberto Carnevali

# **Le aberrazioni ottiche**

Fabiano Editore

® Copyright 2011 – Fabiano Group S.r.l.

Fabiano Editore  
Reg. San Giovanni 40 – Canelli (AT)  
Tel. 0141 827801 – Fax 0141 827830  
e-mail: [editore@fabianogroup.com](mailto:editore@fabianogroup.com) – [www.fabianogroup.com](http://www.fabianogroup.com)

Gli Autori e l'Editore declinano ogni responsabilità per eventuali errori contenuti nel testo.

Tutti i diritti sono riservati.

È vietata ogni riproduzione totale o parziale.



Fabiano Group S.r.l. - Reg. San Giovanni 40 - 14053 Canelli (AT)  
Tel. 0141 827801 - Fax 0141 827830 - e-mail: [editore@fabianogroup.com](mailto:editore@fabianogroup.com)

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| La caustica .....                                                      | 5  |
| Il defocus .....                                                       | 6  |
| L'astigmatismo .....                                                   | 6  |
| L'aberrazione sferica .....                                            | 8  |
| L'aberrazione di coma .....                                            | 15 |
| Trifoglio, Quadrifoglio, Pentafooglio, Esafoglio... ..                 | 17 |
| Il fronte d'onda .....                                                 | 17 |
| L'obiettivo perfetto .....                                             | 18 |
| Gli aberrometri .....                                                  | 19 |
| Il defocus .....                                                       | 21 |
| L'astigmatismo .....                                                   | 22 |
| L'aberrazione sferica .....                                            | 25 |
| Il tilting .....                                                       | 26 |
| L'aberrazione di coma .....                                            | 27 |
| La topoaberrometria .....                                              | 28 |
| I polinomi di Zernike .....                                            | 28 |
| Le aberrazioni .....                                                   | 32 |
| La piramide di Zernike .....                                           | 37 |
| La rappresentazione e la misura delle aberrazioni .....                | 38 |
| La Root Mean Square (RSM) .....                                        | 39 |
| Qualche considerazione sulle rappresentazioni in scala di colori ..... | 39 |
| Una tecnica con tante virtù e qualche limite .....                     | 42 |
| <i>Per saperne di più</i> .....                                        | 43 |
| <i>Bibliografia</i> .....                                              | 44 |





## Le aberrazioni ottiche

Anche se non se ne rendono conto, gli oftalmologi sono le persone più adatte a comprendere le aberrazioni ottiche; quotidianamente si confrontano con queste e sono diventati molto bravi a gestirle, valutarne gli effetti sulla visione, calcolare quali di queste sono più o meno importanti e sono anche in grado di correggerle con lenti e adesso anche chirurgicamente. Tutto questo con alcune grosse limitazioni. Le loro esperienze si limitano alla valutazione di due sole aberrazioni: il defocus e l'astigmatismo. Finora infatti queste sono state le uniche su cui era possibile intervenire, con lenti sferiche o cilindriche, e in questo campo gli oftalmologi hanno sviluppato una notevole esperienza. La nascita della chirurgia refrattiva però ha aperto la possibilità di intervenire anche sulle altre aberrazioni: sferica, coma, trifoglio ecc. con le quali in passato non c'è mai stata la possibilità di misurarsi. La classica valutazione in defocus ed astigmatismo non è quindi più sufficiente, ma l'ottica del sistema oculare deve essere esaminata in modo più approfondito, per cui si è avviato uno studio sulle aberrazioni. I classici strumenti utilizzati per lo studio dell'ottica, dallo specchietto da schiascopia agli autorefrattometri, non sono predisposti per lo studio delle altre aberrazioni ed è stato necessario inventare strumenti più sofisticati come gli aberrometri. Purtroppo questi lavorano valutando la dispersione del fuoco e, utilizzando i polinomi di Zernike, ricostruiscono il "fronte d'onda" e lo scompongono ricavando quello determinato da ogni singola aberrazione. Questo linguaggio non è consono agli oftalmologi, che sono invece abituati a partire dalla forma dell'ottica, ricostruire il cammino dei raggi luminosi e valutare gli effetti che questo può avere sulla visione. Oftalmologi e aberrometri parlano quindi due lin-

guaggi differenti e questo fa insorgere equivoci ed incomprensioni. Tuttavia il discorso è semplice e gli oftalmologi sono proprio le persone più adatte a comprenderlo.

### La caustica

Un sistema ottico, nella sua forma più semplice, è rappresentato da un diaframma (*Fig. 1*), una lente convergente e uno schermo. Il diaframma lascia passare un fascio di raggi luminosi, che in questo caso per semplicità consideriamo paralleli, mentre la lente convergente li focalizza in un punto situato sullo schermo. Perché il sistema ottico sia perfetto si devono verificare due condizioni: il fuoco dei raggi luminosi deve essere localizzato in un punto e questo deve cadere esattamente sullo schermo. La prima condizione si verifica se l'obiettivo, in questo caso la lente, è esente da aberrazioni, mentre la seconda richiede che abbia la giusta potenza, in modo da focalizzare esattamente sullo schermo. Se una o entrambe di queste condizioni non sono rispettate avremo un sistema ottico aberrato. Se l'obiettivo è affetto da aberrazioni

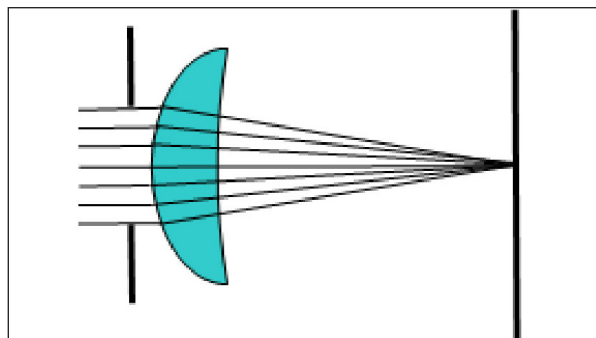


Figura 1

si verifica una dispersione del fuoco, in altre parole i raggi luminosi non focalizzano in un punto, ma si disperdono in uno spazio tridimensionale che può essere ricondotto ad una forma solida e quindi con punti di focalizzazione anche al di fuori dell'asse ottico. Questo spazio tridimensionale in cui si disperde la focalizzazione dei raggi luminosi prende il nome di caustica e quella con cui gli oftalmologi hanno una maggiore dimestichezza è la conoide di Sturm, che si verifica nel caso di un astigmatismo. Avremo modo di parlarne diffusamente in seguito. La caustica di un sistema non aberrato corrisponde invece ad un punto situato sull'asse ottico.

## Il defocus

Questa è la forma più semplice di aberrazione. Si verifica semplicemente quando l'obiettivo non presenta aberrazioni, ma non è della giusta potenza rispetto alla distanza dallo schermo (Fig. 2). Di conseguenza i raggi luminosi focalizzano ancora in un punto situato sull'asse ottico, ma non coincidente allo schermo.

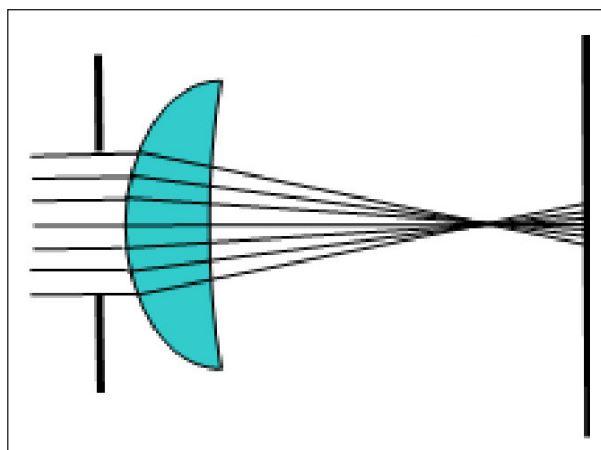


Figura 2

La caustica è quindi sempre rappresentata da un punto situato sull'asse ottico, solo che non si trova sullo schermo. Gli oftalmologi conoscono molto bene questa aberrazione applicata all'occhio e la definiscono miopia, quando i raggi luminosi focalizzano prima della retina ed ipermetropia quando focalizzano dopo. Viene fatta anche una quantificazione del difetto, che viene misurato in diottrie sferiche, negative nel caso della miopia e positive in quello dell'ipermetropia. Queste ci danno una misura dell'entità dell'aberrazione e una indicazione di come correggerlo con lenti. Gli oftalmologi sanno anche fare una valutazione sugli effetti di questa aberrazione sull'acutezza visiva, considerando anche l'età del soggetto, che ha una notevole importanza per valutare gli effetti dell'ipermetropia.

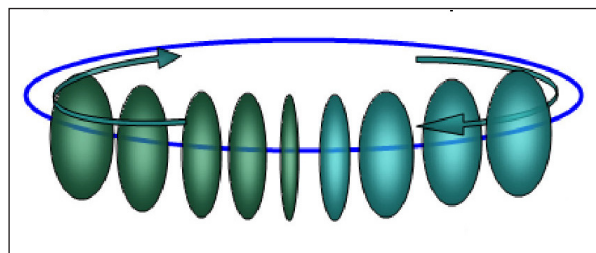


Figura 3

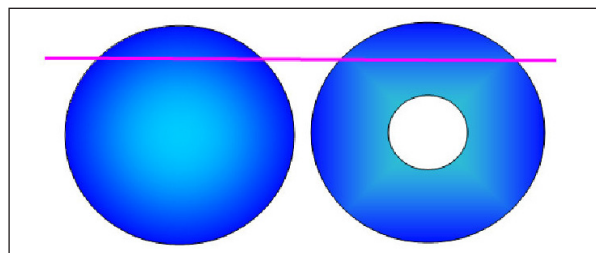


Figura 4

## L'astigmatismo

Questa è una aberrazione ottica piuttosto complessa, con cui tuttavia gli oftalmologi hanno molta dimestichezza, perché ci si devono confrontare quotidianamente. Si verifica quando l'obiettivo ha una sezione torica. Se ci fosse bisogno di rinfrescare un po' le idee su cosa consiste una forma torica possiamo dire che se ruotiamo una circonferenza su se stessa otteniamo una sfera. Se alla circonferenza viene invece fatto eseguire un movimento di rivoluzione attorno ad un punto, quindi lungo un'altra circonferenza (Fig. 3), si ottiene una forma anulare, in pratica una ciambella col buco, che rappresenta appunto il toro (Fig. 4). Sezionando una sfera si ottiene una calotta sferica, mentre sezionando la forma torica si ottiene una calotta con la massima curvatura su un meridiano mentre la curvatura minore sarà sul meridiano perpendicolare.

I meridiani intermedi avranno una curvatura intermedia. Se i raggi luminosi incidono su questa superficie incontreranno un potere refrattivo diverso a seconda del meridiano di incidenza. Consideriamo un astigmatismo nella sua forma più semplice, secondo regola, dove il meridiano verticale, quello a 90 gradi, è il più rifrangente, mentre il perpendicolare, a 180 gradi è il meno rifrangente. Quelli intermedi avranno

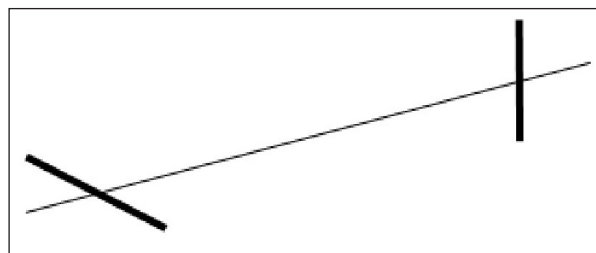


Figura 5

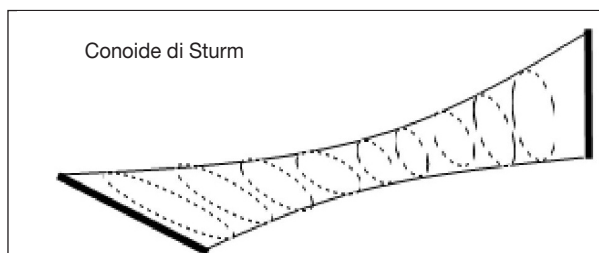


Figura 6

un potere intermedio, in particolare il meridiano a 45 gradi avrà un potere esattamente compreso tra i primi due. I raggi luminosi che incidono sul meridiano verticale focalizzeranno, non in un punto, ma in un segmento orizzontale, perpendicolare all'asse ottico. Quelli che incidono sul meridiano orizzontale, meno rifrangente, focalizzeranno più indietro, in un segmento verticale, sempre perpendicolare all'asse ottico. I restanti raggi luminosi focalizzeranno in uno spazio attorno all'asse ottico compreso tra questi due segmenti, andando a formare una caustica complessa, che prende il nome di Conoide di Sturm. Non è facile disegnare una caustica di questo genere in maniera comprensibile. Per capire come è fatta si può pensare di prendere un tubo cilindrico e di schiacciarlo orizzontalmente in un punto (Fig. 6). Un po' più indietro occorre poi schiacciarlo verticalmente in modo perpendicolare a quello che si è fatto prima. Il tubo si deforma tra le due porzioni schiacciate e la forma che assume richiama quella della conoide di Sturm. Pur con questa complessità gli oftalmologi sanno gestire l'astigmatismo molto bene. Ne viene fatta una quantificazione in diottrie cilindriche, positive e negative, ed è possibile correggerlo con lenti. Questo non basta, infatti per comprendere gli effetti ottici di un astigmatismo occorre anche valutare la posizione che la conoide di Sturm assume rispetto allo schermo, vale a dire al piano retinico. La caustica è compresa tra due segmenti tanto più distanti tra di loro quanto maggiore è l'entità dell'astigmatismo. Gli oftalmologi distinguono tre tipi di astigmatismo semplice:

- Miopico, la conoide è situata davanti alla retina con l'estremità posteriore che coincide col piano retinico; si corregge con lenti cilindriche negative.
- Ipermetropico, la conoide è situata dietro la retina con l'estremità anteriore che coincide col piano retinico, si corregge con lenti cilindriche positive.
- Misto, la conoide è a cavallo del piano retinico, si corregge con una associazione sferocilindrica anche con cilindri crociati nel caso della chirurgia refrattiva.

Ma non è finita, gli oftalmologi sono in grado di valutare anche astigmatismi miopici od ipermetropici

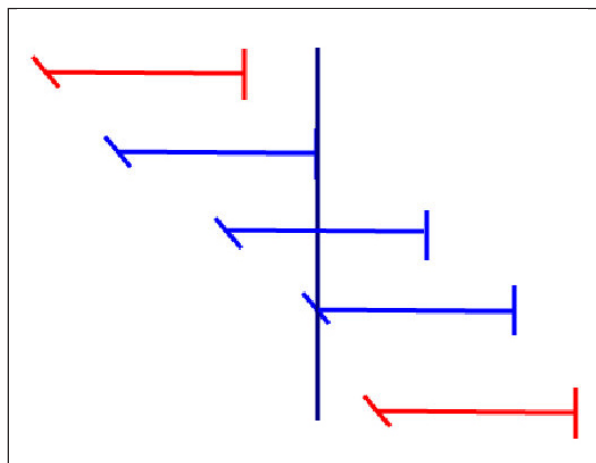


Figura 7

composti, vale a dire associati a miopia o ad ipermetropia, indicati in rosso nella figura 7. Questo rappresenta un esempio della capacità di valutare contemporaneamente due differenti aberrazioni, defocus e astigmatismo, di quantificarli ed eventualmente di correggerli con lenti. Come si vede non si tratta di capacità trascurabili. È vero che oggi tutti hanno in studio un autorefrattometro, ma un buon oftalmologo è in grado, con uno specchietto da schiascopia ed una stecca di lenti, di valutare le aberrazioni di defocus e di astigmatismo di un occhio, quantificarle in diottrie, valutare l'asse dell'astigmatismo, giudicare le conseguenze che possono avere sulla qualità visiva e correggerle con una associazione sferocilindrica. Un buon oftalmologo sa anche prevedere gli effetti di una correzione ottica anche quando questa corregge solo parzialmente una delle due aberrazioni. È abbastanza frequente nella pratica clinica calcolare un "equivalente sferico" quando si vuole correggere un astigmatismo composto, per esempio associato a miopia, ma non si desidera prescrivere una correzione cilindrica completa, perché risulterebbe poco tollerabile. In questo caso, con un calcolo dell'associazione sferocilindrica, è possibile fare in modo di posizionare la conoide di Sturm in modo che il piano retinico cada nel punto di minore dispersione dei raggi luminosi. Solo chi ha molta dimestichezza con queste due aberrazioni, maturata in anni di esperienza quotidiana, può permettersi di gestire una correzione di questo genere.

Purtroppo qui finiscono le abilità degli oftalmologi. Non sono stati istruiti per valutare le altre aberrazioni ottiche, che poi sono state presentate solo in termini di fronte d'onda, che tra l'altro ha l'inconveniente di dipendere dalle dimensioni della pupilla. A questo punto però occorre solo riportare lo studio delle aber-

razioni in un linguaggio consueto e descriverle nello stesso modo con cui sono stati a suo tempo presentati defocus ed astigmatismo, con gli aspetti della sfocatura delle immagini, della posizione sul piano retinico e delle conseguenze sulla visione.

## L'aberrazione sferica

Si tratta di una aberrazione semplice, che tuttavia richiede una esposizione abbastanza dettagliata. Purtroppo a questo punto in genere ci si limita a mostrare l'aspetto di un fronte d'onda che ha la forma di un sombrero (*Fig. 8*) assieme ad un incomprensibile polinomio di Zernike  $[ \sqrt{5(6r^4 - 6r^2 + 1)} ]$  avvertendo che si tratta di una aberrazione di ordine elevato (quarto), spesso senza spiegare veramente in cosa consiste il grado di una aberrazione. Purtroppo si dice anche che gli oftalmologi non hanno bisogno di capire i polinomi di Zernike per-

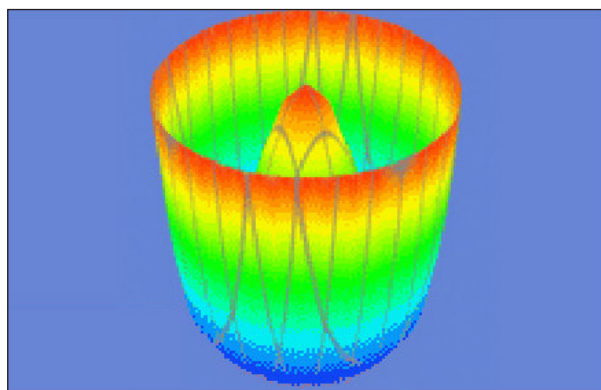


Figura 8

chè è sufficiente che acquistino un aberrometro, frase che spesso sta a significare che in realtà non sono in grado di comprenderli.

Vediamo adesso di spiegarla in un linguaggio più consoni e lasciamo stare al momento i polinomi di Zernike, per esaminare una formula molto più familiare, che tutti gli oftalmologi conoscono. Si tratta della formula generale della refrazione, da cui poi derivano tutte le

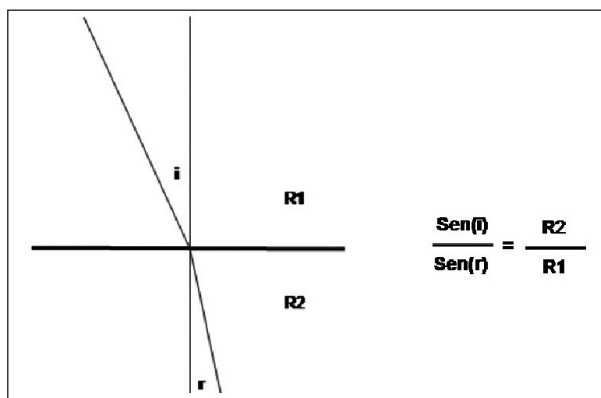


Figura 9

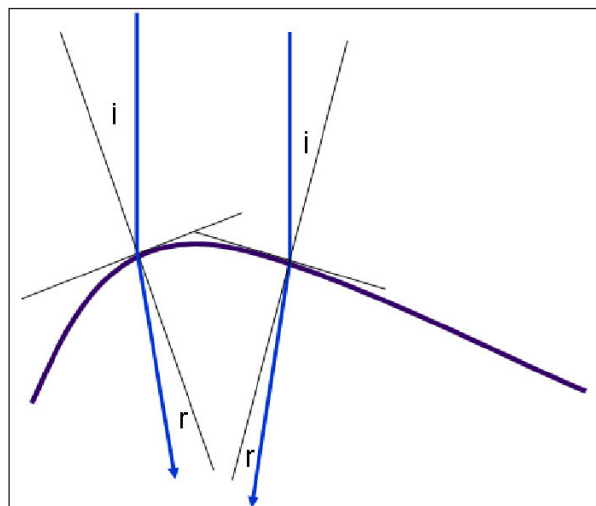


Figura 10

altre formule dell'ottica geometrica (*Fig. 9*). Questa dice semplicemente che, se un raggio luminoso attraversa la superficie di separazione tra due mezzi ad indice di refrazione differente, il raggio stesso viene deviato. La legge ci dice anche di quanto, perché mette in relazione le ampiezze degli angoli di incidenza e di refrazione con gli indici di refrazione dei due mezzi. In altre parole, se conosciamo le caratteristiche dei due mezzi e da dove viene un raggio luminoso, possiamo calcolare dove va a finire.

Cosa succede però se un raggio luminoso, anziché incidere su una superficie piana, passa attraverso una superficie curva? In realtà la legge non cambia. Come è espresso nella *figura 10*, calcoliamo sempre gli angoli di incidenza e di refrazione con lo stesso metodo, con la differenza che, come superficie di separazione tra i due mezzi, si considera la tangente alla curva in quel punto. Per ogni punto di una linea curva è presente una sola retta tangente e per ogni punto di una superficie curva è presente un solo piano tangente. In questo modo è possibile calcolare, per ogni punto della superficie, gli angoli di incidenza e di refrazione e quindi determinare il cammino di ogni singolo raggio luminoso. Nel caso di un fascio luminoso si può calcolare il punto focale o l'eventuale caustica nel caso di un sistema aberrato. Non è esattamente la stessa cosa, ma questo lavoro, eseguito punto per punto con riferimento alla tangente, assomiglia un po' a quello che fanno i topografi corneali quando calcolano la mappa istantanea o tangenziale della cornea.

Fin qui si è fatto implicitamente riferimento ad una generica superficie curva, ma a questo punto viene naturale chiedersi cosa succede se un fascio luminoso attraversa una superficie regolare, ad esempio una calotta sferica. Si tratta del diottro sferico e ci piace pensare che



i raggi luminosi che lo attraversano vengano tutti focalizzati in un punto grazie all'assenza di aberrazioni, che caratterizzerebbe appunto il diottro sferico. In realtà è quello che in sostanza insegna l'ottica geometrica, che fornisce anche una formula per calcolare il potere del diottro:

$$F = n^2 R / (n^2 - n^1)$$

dove:

F = distanza focale, quindi potere del diottro

R = raggio di curvatura del diottro

$n^1$  = indice di rifrazione del primo mezzo

$n^2$  = indice di rifrazione del secondo mezzo

Le leggi dell'ottica però ci dicono anche che questa formula vale solo per curvature modeste e solo se consideriamo i raggi parassiali, cioè quelli molto vicini all'asse ottico.

Nell'occhio, se consideriamo anche solo la cornea, vediamo che ha un potere di oltre 40 diottrie, con un diametro di 11 mm. mentre la pupilla può arrivare a 7

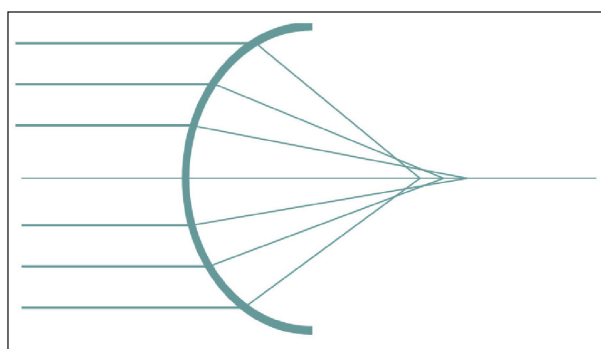


Figura 11

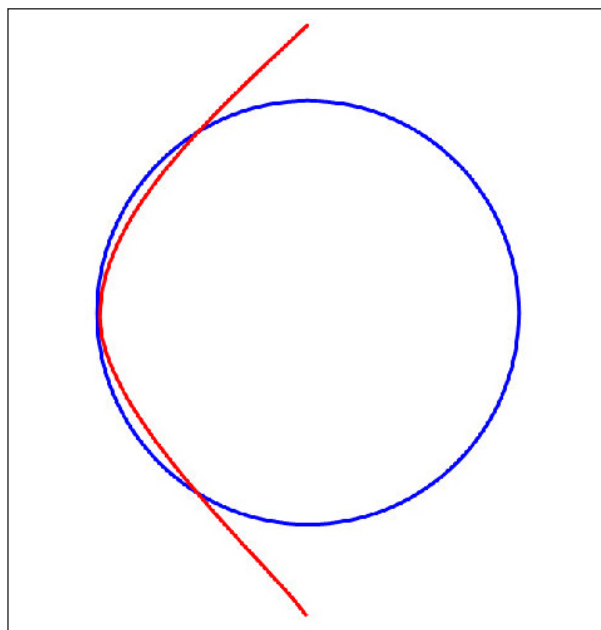


Figura 12

mm. di diametro. Non si tratta propriamente di piccola curvatura e di raggi parassiali. In oculistica quindi queste approssimazioni non sono sufficienti.

La realtà è che il diottro sferico non è un sistema esente da aberrazioni e i raggi luminosi non focalizzano in un punto. Se si esegue un esame della refrazione punto per punto dei vari raggi luminosi con riferimento alla tangente, come è stato descritto prima, si può determinare che in realtà i raggi periferici focalizzano prima di quelli parassiali e il fuoco quindi non si forma in un sol punto, ma si disperde in un segmento compreso tra il fuoco periferico e quello centrale. Questa prende il nome di aberrazione sferica, così chiamata perché è propria del diottro sferico, anche se, come vedremo, non appartiene solo a questo.

Per convenzione l'aberrazione sferica viene definita positiva quando, come nel caso precedente, i raggi periferici focalizzano prima di quelli parassiali, mentre nel caso contrario si parla di aberrazione sferica negativa. Affrontiamo allora il problema da un altro punto di vista. Se il diottro sferico presenta in realtà una aberrazione sferica positiva, come dovrà essere disegnata una superficie ottica per non avere aberrazione sferica? Visto che nel caso del diottro sferico i raggi periferici focalizzano prima di quelli centrali dovremo costruire una superficie il cui potere sia maggiore al centro rispetto alla periferia, vale a dire in cui la curvatura vada diminuendo dal centro alla periferia (Fig. 12). Per una superficie più curva nella zona centrale rispetto a quella periferica c'è un termine apposito: prolata. In questo modo avremo una superficie ottica esente da aberrazione sferica, in cui tutti i raggi luminosi focalizzano in un solo punto. Ma di quanto deve essere prolata una superficie per rispondere a queste caratteristiche? Purtroppo l'entità della prolatura dipende da diversi fattori, prima di tutto dagli indici di rifrazione dei due mezzi, ma anche dal potere di base del diottro stesso. Vale a dire che esiste una prolatura ideale per il diottro di una diottria, una per quello di due diottrie e così via. Come si vede quindi si tratta di una cosa abbastanza complessa da costruire, ma non particolarmente difficile da comprendere. Immaginiamo adesso di costruire una superficie ottica perfetta, prolata al punto giusto in modo da non avere aberrazione sferica e tale quindi che tutti i raggi luminosi focalizzino in un solo punto. E' evidente che qualunque superficie la cui prolatura si discosta da questa avrà una aberrazione sferica. Se infatti la curvatura centrale è eccessiva avremo una superficie troppo prolata e si realizzerà quindi una aberrazione sferica negativa, con i raggi parassiali che focalizzano prima di quelli periferici (Fig. 13). Un esempio di superficie di questo tipo è la cornea operata di chirurgia refrattiva

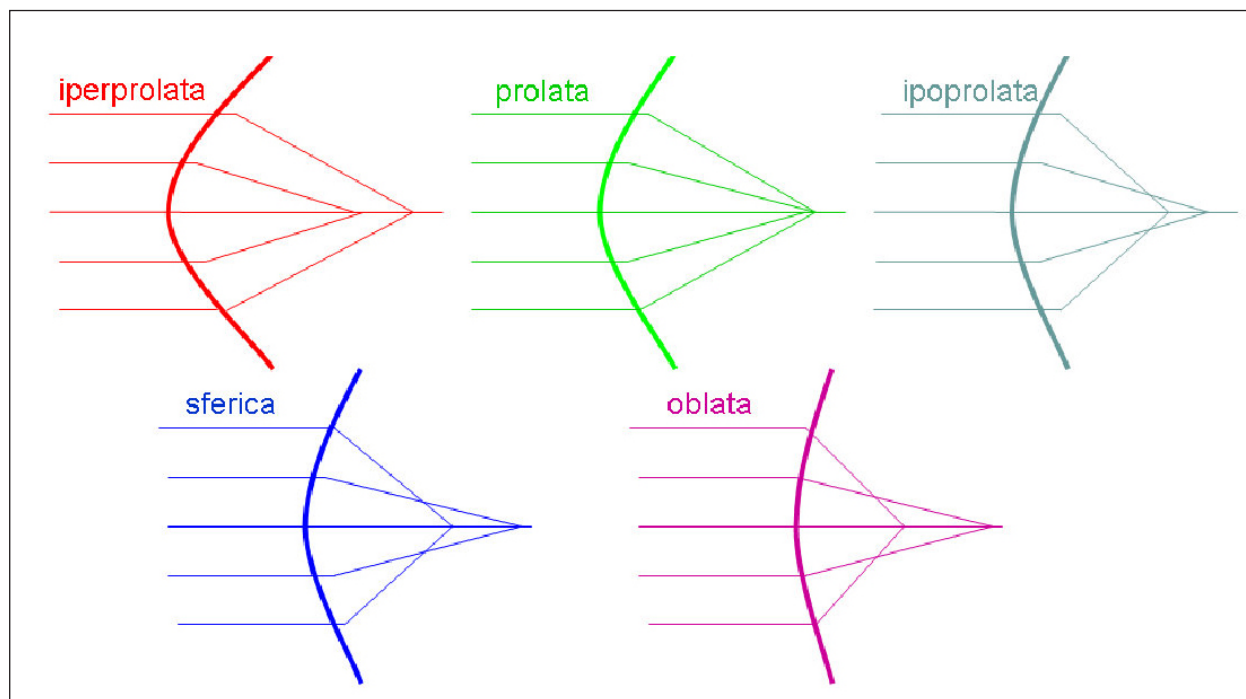


Figura 13

per ipermetropia, dove viene appunto incurvata la parte centrale. Se invece la superficie è effettivamente prolata, ma non a sufficienza, avremo ancora una residua aberrazione sferica positiva. Potremmo definire una simile curva con il termine di ipoprolata, cioè non sferica, ma nemmeno prolata abbastanza da annullare l'aberrazione sferica positiva. Se diminuiamo ancora la curvatura centrale arriviamo al diottero sferico, che, come si è detto, presenta una aberrazione sferica positiva. Riducendo ulteriormente la curvatura centrale arriviamo ad avere una superficie più piatta al centro e più curva in periferia, in cui l'aberrazione sferica positiva sarà ancora più accentuata. In questo caso si parla di superficie oblata ed un esempio di questa è dato dalla cornea operata di chirurgia refrattiva per miopia, dove si crea appunto un appiattimento della curvatura centrale. Come si vede quindi l'aberrazione sferica non è appannaggio solo del diottero sferico, ma qualunque superficie che si discosti

dalla prolatura ideale, determinata dagli indici di refrazione e dal potere di base, sarà afflitta da una aberrazione sferica positiva o negativa.

Finora, per semplicità si è parlato di diottero, ma il discorso può essere esteso tranquillamente alle lenti che non sono altro che l'associazione di due diottri, il discorso diventa solamente più complicato, ma la sostanza non cambia.

Facciamo quindi una considerazione riassuntiva. Una superficie ottica può provocare una aberrazione sferica positiva o negativa. La superficie prolata tende a dare una aberrazione sferica negativa mentre quella oblata positiva. L'assenza di aberrazione non corrisponde però alla superficie sferica, bensì ad una superficie con una certa prolatura, ne consegue che ci sono superfici prolate che tuttavia mantengono ancora una quota di aberrazione sferica positiva.

L'aberrazione sferica può sembrare complessa, in realtà

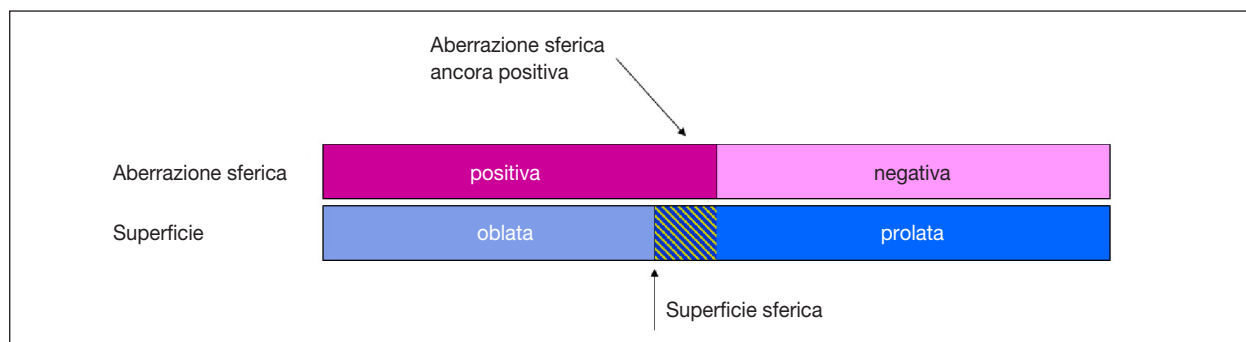


Figura 14



è abbastanza semplice, ma non è mai stata studiata a fondo dagli oftalmologi in quanto non ci sono mai stati i mezzi per valutarla e per correggerla e solo recentemente si è reso necessario prenderla seriamente in considerazione. In realtà la caustica dell'aberrazione sferica è molto semplice, i raggi luminosi non focalizzano in un punto, ma in un segmento compreso tra i fuochi dei raggi periferici e di quelli parassiali; per di più questo segmento coincide con l'asse ottico. Si tratta quindi di una caustica molto più semplice della meglio conosciuta conoide di Sturm. Sarebbe poi possibile quantificare l'entità di una aberrazione sferica misurandola in diottrie (asferiche, positive e negative) sulla base della differenza tra il potere centrale e quello periferico dell'obiettivo. Gli aberrometri non lavorano in questo senso, ma sarebbe il caso che gli oftalmologi si riappropriassero dello studio delle aberrazioni adattandolo alle proprie esigenze. Facciamo solo attenzione a non confondere le lenti asferiche, per il momento solo intraoculari, che correggono l'aberrazione sferica, con le lenti sferiche, che non hanno nulla a che vedere con l'aberrazione sferica e che invece correggono il defocus.

Abbiamo visto in precedenza che, se vogliamo valutare gli effetti di una aberrazione sulla qualità della visione, è necessario considerare la posizione della caustica rispetto al piano retinico. Anche l'aberrazione sferica non si sottrae a questa regola. La caustica in questo caso è semplicemente un segmento coincidente con l'asse ottico, per cui forse sarebbe il caso di parlare di una aberrazione sferica miopica, ipermetropica o mista, come si fa con l'astigmatismo; forse questo concetto dovrà essere preso in considerazione e sviluppato dagli oftalmologi.

A questo punto però attenzione a non fare confusione. Una aberrazione sferica negativa non corrisponde a quella miopica, ma è quella in cui i raggi luminosi centrali focalizzano prima di quelli periferici. A seconda della sua posizione rispetto al piano retinico la distingueremo in miopica ipermetropica e mista. Allo stesso modo l'aberrazione sferica positiva è quella in cui i raggi periferici focalizzano prima di quelli centrali e anche qui, in base alla posizione della caustica rispetto al piano retinico, la distingueremo in miopica ipermetropica e mista. Se la cosa a prima vista sembra complicata basti pensare che in questo caso non abbiamo a che fare con un asse per cui tutto è molto più semplice rispetto alla correzione di un astigmatismo. Anche qui abbiamo astigmatismi secondo o contro regola ed entrambi possono essere miopici, ipermetropici o misti.

Anche per quanto riguarda l'aberrazione sferica bisognerebbe abituarsi a valutare le conseguenze che questa può avere sul processo visivo. Se si chiede ad un oftalmologo di valutare gli effetti sulla visione di una



Figura 15

associazione tra defocus ed astigmatismo, questi non hanno molta difficoltà a rispondere. Non potrà fare una quantificazione precisa dell'acutezza visiva, perché dipende da tanti fattori, tra cui le dimensioni della pupilla, ma avrà tutto sommato le idee abbastanza chiare.

Se chiediamo invece quali conseguenze sulla visione abbiamo in caso di aberrazione sferica, diventa molto più difficile avere una risposta soddisfacente. Non tutti sanno infatti che una aberrazione sferica in realtà può permettere un visus di 10/10 naturali. Quali sono allora gli effetti provocati da questa aberrazione?

L'aberrazione sferica comporta due fenomeni fondamentali, se vogliamo uno negativo ed uno positivo.

Quello negativo consiste nella diminuzione della sensibilità al contrasto, cosa che risulta abbastanza intuitiva; la dispersione del fuoco riduce infatti la concentrazione luminosa. In assenza di aberrazione sferica, dove tutta la luce viene concentrata in un solo punto, è evidente che il contrasto viene meglio percepito. Difficilmente però nel corso di una visita oculistica viene fatta una valutazione della sensibilità al contrasto, che non fa parte della routine diagnostica. Nella maggior parte degli studi oculistici non esiste nemmeno una tabella per fare un test adeguato e quando questo viene eseguito, per lo più a scopo di ricerca, è in genere finalizzato a valutare una opacità del cristallino, anch'essa in grado di ridurre la sensibilità al contrasto.

L'aspetto positivo consiste invece nell'aumento della profondità di campo che caratterizza una immagine focalizzata da un obiettivo con aberrazione sferica. Quest'ultima è infatti l'unica che non presenta solo lati negativi, ma fornisce anche qualche vantaggio. Per capire le cose però bisogna avere le idee chiare sulla profondità di campo e sapere bene in cosa consiste. Quando viene focalizzato un oggetto ad una certa distanza,



Figura 16



Figura 17

questo rappresenta l'unica immagine veramente nitida, mentre tutto quello che sta davanti o dietro di esso appare sfocato. La profondità di campo rappresenta la distanza, davanti e dietro all'immagine principale, in cui la nitidezza viene mantenuta o comunque in cui la sfocatura è trascurabile. Si tratta quindi di una grandezza che viene misurata in distanza lineare. Ci si può fare un'idea confrontando le due immagini presentate.

Nella prima (Fig. 16) si ha una bassa profondità di campo, il cavallo presenta un ottimo contrasto, ma tutto ciò che sta davanti o dietro di esso risulta sfocato. Nella seconda (Fig. 17) il contrasto diminuisce, ma viene mantenuta la nitidezza anche per gli oggetti più lontani o più vicini.

Per ovvie ragioni, legate alla vergenza dei raggi luminosi, l'oggetto focalizzato non si trova al centro della zona di profondità di campo, che è invece sempre più estesa dietro piuttosto che davanti ad esso. La profondità di campo è influenzata da numerosi fattori, diminuisce quanto più l'oggetto è vicino mentre aumenta con l'aumentare della distanza focale e restringendo il diaframma. Naturalmente è influenzata dall'aberrazione sferica del sistema ottico.

Un'ultima precisazione, non bisogna confondere la profondità di campo con la profondità di fuoco anche se in pratica esprimono lo stesso concetto. La profondità di fuoco si riferisce al sistema ottico e indica un intervallo di tolleranza nella distanza fra il piano dello schermo (la retina nel caso dell'occhio) e l'elemento posteriore dell'obiettivo. Si applica in genere alle macchine fotografiche e si esprime in centesimi di millimetro. In parole povere la profondità di campo si riferisce all'immagine prodotta, mentre la profondità di fuoco riguarda il sistema ottico.

A questo punto è venuto il momento di fare qualche considerazione. Tutti sappiamo che un occhio normale

dovrebbe essere esente da aberrazioni, gli oftalmologi sanno tuttavia che esistono occhi miopi o ipermetropi e che spesso è presente anche un astigmatismo. L'occhio emmetrope però rappresenta sicuramente la media di tutte le possibili alterazioni. Come si comporta allora l'occhio medio rispetto all'aberrazione sferica?

La risposta non è immediata. L'obiettivo dell'occhio è formato da due lenti, cornea e cristallino che vanno esaminate separatamente.

La topografia corneale è presente già da anni e gli oftalmologi si sono già in buona parte abituati a valutare le topografie. Ogni cornea ha la propria mappa topografica, ma possiamo tranquillamente affermare che la sua superficie anteriore ha tendenzialmente una superficie prolata. Questo è in linea con quanto è emerso precedentemente, una superficie sferica avrebbe una aberrazione sferica positiva e la prolatatura tende ad eliminarla. La cornea dell'occhio medio però non è abbastanza prolata per annullare completamente l'aberrazione sferica positiva. Potremmo definirla una superficie ipoprolata. Questo residuo di aberrazione viene però compensato dal cristallino, che avrebbe una debole aberrazione sferica negativa, in grado di compensare quella residua della cornea. In complesso l'obiettivo dell'occhio finisce con l'essere esente da aberrazione sferica. Questo naturalmente riferendoci sempre all'occhio medio.

Il discorso vale però per l'occhio giovane, perché con l'avanzare dell'età le cose cambiano. Mentre la cornea mantiene sostanzialmente la stessa forma, il cristallino tende a perdere progressivamente la sua aberrazione sferica negativa, che prima si annulla, per poi diventare addirittura positiva e andarsi così a sommare a quella della cornea. Quindi, mentre l'occhio giovane può dirsi esente da aberrazione sferica, con l'avanzare dell'età ne compare una positiva.

Queste considerazioni ci permettono di fare un po' di

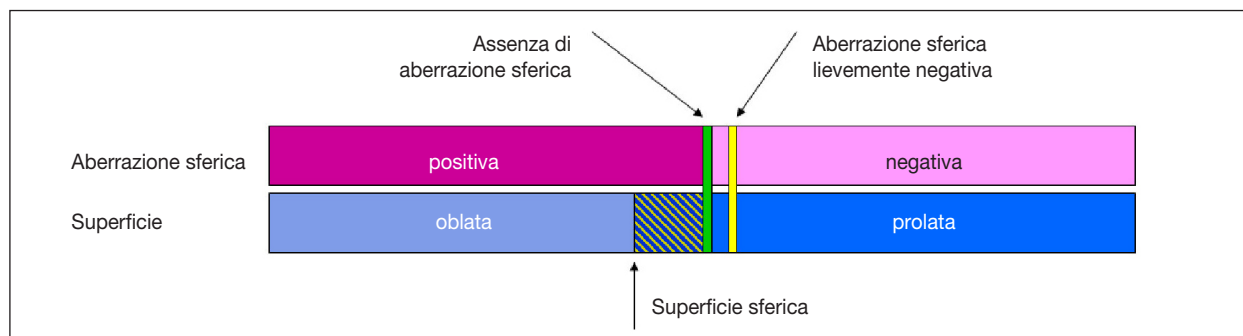


Figura 18

chiarezza sulle lenti intraoculari asferiche che sono state messe in commercio da alcuni anni. Una lente intraoculare tradizionale presenta delle facce sferiche e quindi viene ad avere una aberrazione sferica positiva, che si va a sommare con quella della cornea. Le lenti di nuova generazione sono invece asferiche, in pratica con una prolatura di almeno una delle facce, in modo da avere una curvatura maggiore al centro rispetto alla periferia così da controbilanciare l'aberrazione sferica della cornea.

Ci sono però due razionalità nella fabbricazione di queste lenti. Alcune presentano una prolatura ideale tale da renderle esenti da aberrazione sferica. Si tratta delle cosiddette "aberration free" che si pongono in corrispondenza della linea verde indicata dalla figura 18. In pratica impiantando una di queste lenti non si induce una nuova aberrazione, ma si mantiene solo quella determinata dalla forma della cornea.

Altre lenti invece cercano di simulare il comportamento del cristallino giovane inducendo una aberrazione sferica negativa. Sono leggermente iperprolate, si pongono in corrispondenza della linea gialla indicata dalla figura e tendono a contrastare l'aberrazione sferica positiva residua determinata dalla cornea. In teoria queste lenti dovrebbero determinare la completa assenza di aberrazione sferica dell'obiettivo totale dell'occhio.

Non è questa la sede per esprimere giudizi sull'opportunità di impiantare lenti intraoculari asferiche ne' tantomeno per giudicare quale sia la lente migliore. Si possono però fare alcune considerazioni.

Per ottenere una asfericità bisogna costruire una lente la cui curvatura sia maggiore al centro rispetto alla periferia. Più questo fenomeno è accentuato e maggiori saranno gli inconvenienti legati ad un eventuale decentramento. Impiantare una lente asferica ha lo scopo di ridurre l'aberrazione sferica che si riscontra in genere dopo un intervento di cataratta, ma tutto questo è valido solo in presenza di un occhio medio, con una curvatura corneale standard. Di fronte a cornee particolari il discorso può essere diverso ed è bene che gli oftalmo-

logi abbiano chiaro questo concetto e siano in grado di valutare esattamente cosa si accingono ad impiantare, specialmente oggi, che sempre più frequentemente, ci si trova ad operare occhi con cornee precedentemente operate di chirurgia refrattiva. Non è escluso che in un futuro possano venire fornite lenti a diversa "asfericità", da scegliere di volta in volta dopo aver eseguito una topoaberrometria prima dell'intervento, in modo da impiantare la lente che meglio si adatta all'aberrazione sferica della cornea del paziente. Bisognerebbe però che fossero gli oftalmologi ad indirizzare la ricerca, sempre che ritengano opportuna una scelta di questo genere, ed è quindi necessario che comprendano a fondo il significato delle aberrazioni.

### È proprio sempre conveniente eliminare l'aberrazione sferica?

A questa domanda probabilmente nessuno al momento sa dare una risposta definitiva, forse gli oftalmologi non hanno ancora una esperienza sufficiente per una valutazione equilibrata ed è possibile che in futuro le cose diventino più chiare. Sappiamo che in un sistema con aberrazione sferica c'è un vantaggio legato all'aumento della profondità di campo, che si traduce nella possibilità di avere a fuoco contemporaneamente più oggetti a distanze diverse, senza fare entrare in gioco l'accomodazione. Lo sanno bene i fabbricanti di strumenti ottici. Abbiamo visto che, in un occhio giovane, il cristallino presenta una aberrazione sferica negativa, che va a compensare quella residua della cornea, in modo che l'intero obiettivo oculare sia esente da aberrazione e quindi, pur avendo una riduzione della profondità di campo, può usufruire al meglio di un'ottima sensibilità al contrasto. Al giovane però può importare poco della profondità di campo, ha un'efficiente accomodazione, che gli permette di focalizzare rapidamente gli oggetti alle varie distanze e quindi ha tutte le ragioni di sentirsi soddisfatto di un sistema visivo costruito in questo modo. Nell'anziano invece cosa succede? Non è che l'aberrazione sferica che si produce in realtà va a

compensare, almeno in parte, la perdita dell'accomodazione? Purtroppo non è così, invecchiare non è mai un vantaggio, tanto che è evidente che tutti, raggiunta una certa età, devono ricorrere agli occhiali per vicino. È vero che nell'occhio anziano si crea una aberrazione sferica, che in teoria dovrebbe aumentare la profondità di campo, ma la realtà è che questa si sviluppa nella direzione sbagliata e adesso vediamo di esaminare la questione in dettaglio, perché si tratta di un fatto interessante, che sta alla base delle moderne tecniche di correzione della presbiopia.

Nella *figura 19* vengono illustrati due esempi. Il primo corrisponde ad una aberrazione sferica positiva in cui i raggi luminosi periferici (rossi) focalizzano prima di quelli centrali (blu). Nel secondo caso si tratta di aberrazione sferica negativa in cui i raggi centrali (blu) focalizzano prima di quelli periferici (rossi). Bisogna notare che in questo caso il piano retinico coincide con il punto di focalizzazione più lontano e quindi il segmento che rappresenta la caustica dell'aberrazione sferica giace completamente davanti alla retina e volendo si potrebbe definire questa come aberrazione sferica miopica. In entrambi i casi il fuoco si disperde in un segmento la cui lunghezza è proporzionale all'entità dell'aberrazione sferica. In ciascun punto di questo segmento si ha la focalizzazione dei raggi luminosi, che in questo caso giungono all'obiettivo paralleli e quindi provenienti

dall'infinito, ma non ci sarebbero differenze se considerassimo raggi divergenti.

La dispersione del fuoco lungo un segmento permette a questo sistema ottico di aumentare la propria profondità di campo. È evidente che nel primo caso i raggi parassiali sono a fuoco sulla retina, mentre i raggi periferici focalizzano prima. Possiamo dire che questo sistema ottico è in grado di focalizzare contemporaneamente sia le immagini all'infinito che quelle vicine, le prime grazie ai raggi parassiali e le altre con quelli periferici. Se vogliamo intenderci meglio, trascurando un po' la correttezza dei termini, diciamo che questo sistema è emmetrope al centro e miope in periferia.

L'altro sistema è simile, anche qui c'è una aberrazione sferica con dispersione dei raggi luminosi, solo che la situazione tra i raggi centrali e quelli periferici è invertita. Questo sistema è emmetrope in periferia e miope al centro.

Quale di questi due sistemi, entrambi con aberrazione sferica, è più efficace per le necessità visive di un individuo? In altre parole quale dei due permette una buona visione da lontano e contemporaneamente la possibilità di leggere, anche in assenza di accomodazione, senza utilizzare lenti per vicino?

Tutto fa pensare che il sistema più efficace sia il secondo, quello con aberrazione sferica negativa. La spiegazione risiederebbe nel fatto che, durante la lettura, la pupilla si restringe e quindi verrebbe penalizzato l'apporto relativo ai raggi periferici, che nell'aberrazione positiva sono proprio quelli che permettono la visione per vicino.

Ci sono diversi indizi che avvalorano questa ipotesi.

Il primo ci viene dall'osservazione del comportamento dell'occhio normale. Se si esegue una aberrometria in un occhio giovane durante l'accomodazione, si osserva naturalmente un defocus, per aumento della potenza dell'obiettivo oculare grazie alla contrazione del cristallino. Contemporaneamente però c'è anche un aumento dell'aberrazione sferica negativa, che in qualche modo contribuirebbe alla focalizzazione degli oggetti a distanza ravvicinata. Questa deve necessariamente essere dovuta ad una modificazione di forma del cristallino e ci fornisce qualche informazione in più sul meccanismo dell'accomodazione. Se anche l'occhio normale utilizza l'aberrazione sferica negativa per collaborare all'accomodazione questo potrebbe voler dire che si tratta di un meccanismo efficace.

Un secondo indizio deriva dalla chirurgia refrattiva. Quando si è cominciato a correggere le ipermetropie ci si è accorti che i pazienti operati, anche se di una certa età, sono in grado di leggere da vicino anche senza correzione. Questo fenomeno è stato variamente interpretato, si è invocata una maggiore capacità accomoda-

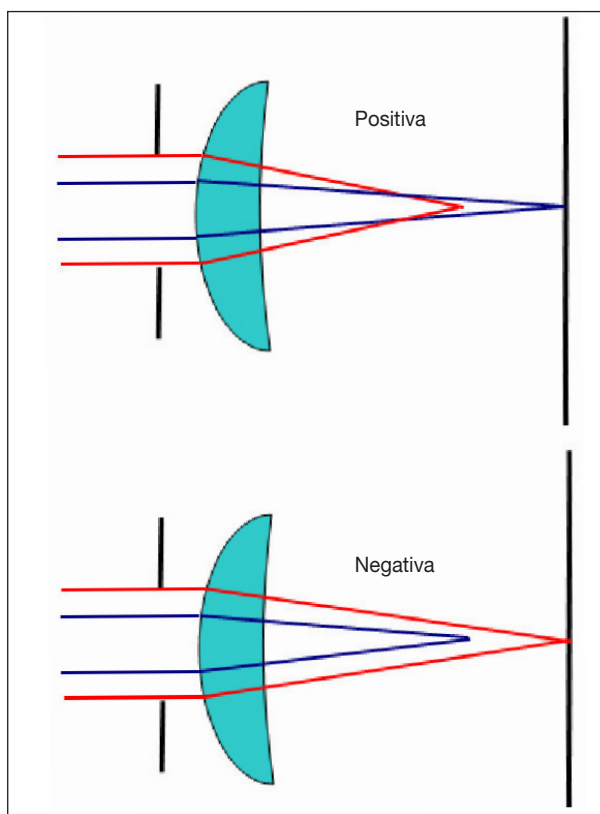


Figura 19



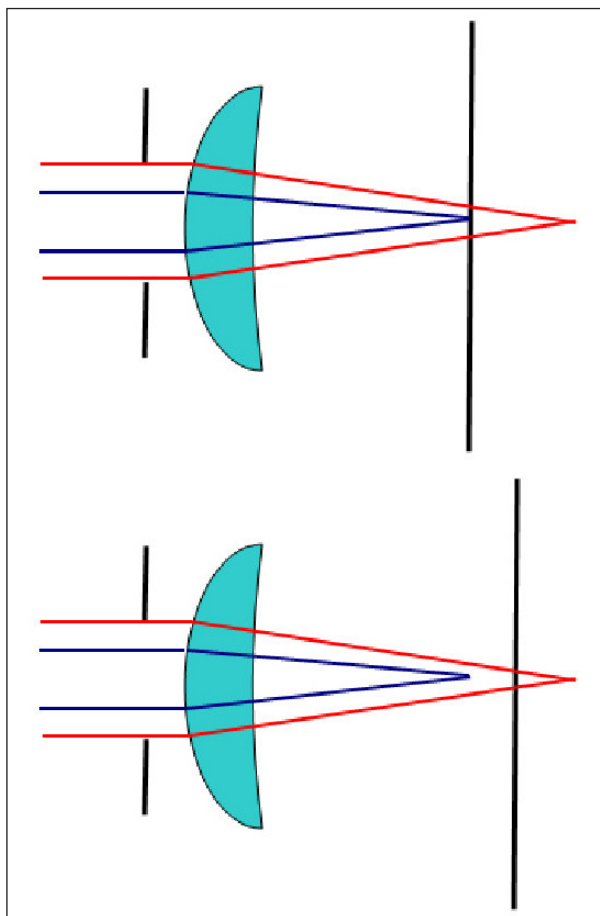


Figura 20

tiva degli ipermetropi o si è detto addirittura che questi, al contrario dei miopi, sono semplicemente abituati ad una cattiva visione a distanza ravvicinata. In realtà quando si esegue un trattamento ipermetropico si crea una iperprolatura della cornea, che viene infatti incurvata al centro. Si determina quindi una aberrazione sferica negativa, che è efficace nel permettere una visione per vicino. Anche nel trattamento miopico si crea una aberrazione sferica, ma positiva, e si sa che i miopi operati non sono in grado di vedere da vicino dopo una certa età.

Nell'esempio che è stato fatto si è ipotizzato che il piano retinico coincida con l'estremità posteriore del segmento, che costituisce la caustica dell'aberrazione sferica e che quindi questa vada a cadere interamente davanti alla retina. Si possono però verificare anche altre situazioni come quelle illustrate nella *figura 20*, in cui il piano retinico coincide con l'estremità anteriore del segmento o sta a cavallo di questo. In questi casi i fenomeni descritti in precedenza si verificano ugualmente, ma almeno in teoria, dovrebbero prevedere l'intervento di una certa quota di accomodazione. In realtà non si usa fare una distinzione dei vari tipi di aberrazione sferica in questo senso, ma forse sarebbe il momento

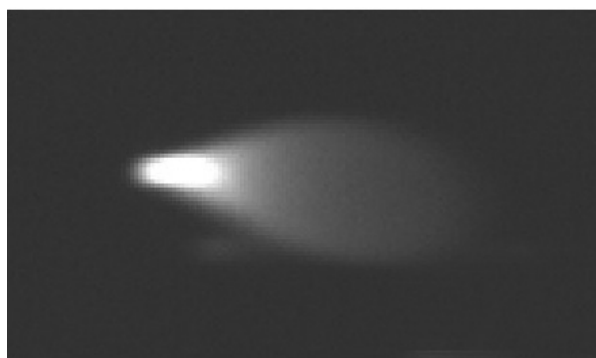


Figura 21

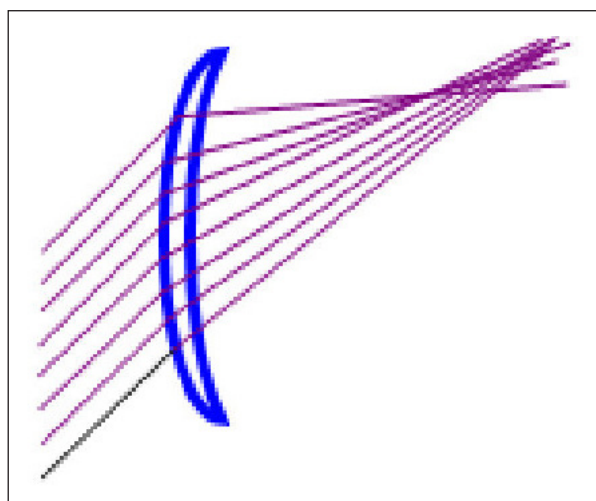


Figura 20

di introdurre il concetto di aberrazione sferica miopica, ipermetropica e mista.

### L'aberrazione di coma

Prima di tutto precisiamo che il termine "coma" deriva dall'aspetto a cometa dell'immagine, che è formata dagli strumenti ottici con questa aberrazione. Il termine è la contrazione della parola cometa, si tratta di un sostantivo femminile e quindi si dice "la coma". Il sostantivo "coma" al maschile ha invece un altro significato.

Per descrivere questo tipo di aberrazione in genere si porta l'esempio di quello che succede quando un fascio di raggi attraversa un sistema ottico non aberrato, ma incidendo obliquamente, cioè non parallelo all'asse ottico. In effetti in questi casi si verifica appunto una aberrazione di coma. Questo esempio però non è l'ideale, anche perché crea un po' di confusione con il tilting, che è un altro tipo di aberrazione, peraltro molto semplice, che si verifica quando ad essere obliquo è il fronte d'onda dopo la refrazione e non i raggi luminosi prima dell'obiettivo. È un discorso semplice, ma per capirlo bisognerebbe avere le idee chiare

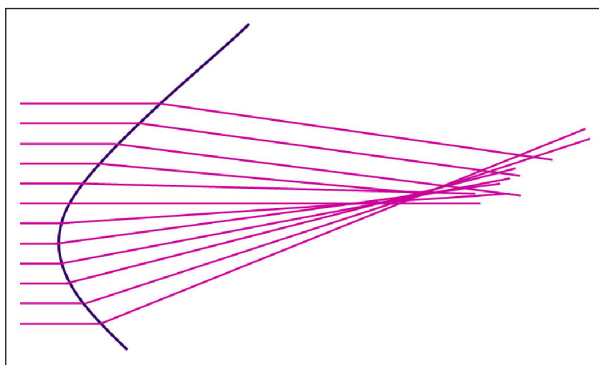


Figura 23

sul fronte d'onda, per il momento basti sapere che il termine tilting non si riferisce all'inclinazione della lente perché in questo caso si determina una coma.

Per spiegare meglio l'aberrazione di coma, possiamo dire che si verifica quando i raggi luminosi attraversano una superficie ottica che ha una superficie prolata, ma decentrata da un lato. In altre parole il punto di maggiore curvatura non coincide con l'asse ottico, ma è spostato perifericamente. Da questo punto ci sarà una progressiva riduzione della curvatura verso la periferia, che però sarà più "ripida" da un lato rispetto all'altro. Si possono anche individuare un punto di massima ed uno di minima curvatura, in posizioni diametralmente opposte. La descrizione di una superficie di questo tipo ricorda quella della cornea affetta da cheratocono, che, in effetti, rappresenta la patologia oculare che più tipicamente genera una aberrazione di coma. Questa però si può verificare anche in altre situazioni cliniche, come nelle inclinazioni o nei decentramenti delle lenti intraoculari, specialmente se asferiche, o nei trattamenti refrattivi decentrati, particolarmente se ipermetropici.

Si tratta di una aberrazione molto fastidiosa, che provoca alterazioni consistenti sulla qualità della visione e per cui non c'è molto da fare anche perché è abbastanza difficile da correggere. Tuttavia la si riscontra abbastanza frequentemente nella pratica clinica ed è la principale responsabile della cosiddetta ombra a forbice, che si nota nella schiascopia. Fino all'avvento degli aberrometri non ci sono però state molte possibilità di valutarla con gli strumenti ed è stata praticamente ignorata dagli oftalmologi, anche perché c'erano poche possibilità di correggerla.

A questo punto se chiediamo ad un oftalmologo cosa caratterizza principalmente, dal punto di vista refrattivo, un occhio affetto da cheratocono, ci sentiremo spesso rispondere che questo è affetto da un astigmatismo elevato. Se però andiamo ad eseguire una aberrometria, o anche solo una topoaberrometria corneale,

ci accorgiamo che in realtà di astigmatismo ce n'è ben poco, mentre il quadro aberrometrico è dominato dalla coma. Il motivo per cui si parla di astigmatismo risiede nel fatto che, se poniamo un occhio con cheratocono davanti ad un autorefrattometro, questo, non costruito per valutare la coma, interpreterà le distorsioni come si trattasse di astigmatismo e ci fornirà un valore elevato. L'autorefrattometro misura solo defocus ed astigmatismi e non è in grado di valutare le altre aberrazioni. Del resto gli oftalmologi hanno sempre definito come "astigmatismo irregolare" tutte le aberrazioni che non erano in grado di valutare. Qualcuno adesso obietterà che è tuttavia possibile migliorare la visione di un occhio con cheratocono con lenti cilindriche e che è pratica clinica comune prescrivere a questi pazienti associazioni sferocilindriche, soprattutto negative, che in effetti permettono di migliorare sensibilmente l'acutezza visiva. In realtà una combinazione sferocilindrica ha effettivamente la possibilità di ridurre le dimensioni della caustica provocata da una coma e di porre anche il piano retinico nella posizione della minore dispersione dei raggi luminosi. Gli oftalmologi hanno sviluppato una notevole capacità in questo senso e sono in grado di correggere al meglio alterazioni della visione di questo tipo. con lenti sferiche e cilindriche, in quanto non hanno mai avuto a disposizione lenti comatiche. Questo fatto ricorda un po' la correzione dell'equivalente sferico in cui si utilizzano lenti sferiche perché non si ha a disposizione o non si vuole prescrivere una lente cilindrica di potere elevato. Questo non vuol dire che le lenti sferiche correggono gli astigmatismi, ma solo che sono in grado di posizionare la caustica, cioè la conoide di Sturm, nella posizione di minore dispersione del fuoco rispetto al piano retinico, migliorando in questo modo la capacità visiva. Allo stesso modo le associazioni sferocilindriche sono in grado di fare la stessa cosa con la caustica provocata dall'aberrazione di coma.

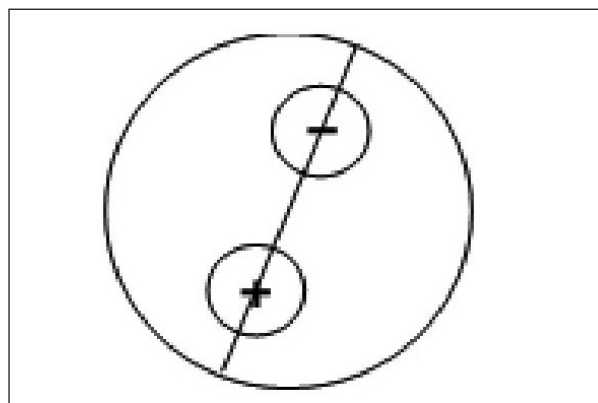


Figura 24



Si è accennato a lenti comatiche, attualmente non esistono, ma se ci fossero potrebbero essere misurate in diottrie (comatiche), corrispondenti alla differenza tra il potere dei punti di massima e minima curvatura. Bisognerebbe inoltre prevedere un asse di rotazione come avviene per gli astigmatismi. Non sto auspicando l'introduzione di lenti comatiche, renderebbe le cose troppo complicate, ma lo scopo è solo quello di ricondurre lo studio di una aberrazione in termini comprensibili agli oftalmologi, che sono abituati a pensare ad una lente con cui correggere un difetto visivo. Allo stato attuale però l'unica possibilità, non chirurgica, di correggere una aberrazione di coma, di origine corneale, consiste nell'applicazione di una lente a contatto rigida. I trattamenti refrattivi personalizzati possono servire nel caso di ablazioni decentrate, mentre per la dislocazione dei cristallini intraoculari rimane solo il loro riposizionamento. È comunque importante che gli oftalmologi prendano coscienza di questo tipo di aberrazione, sappiano valutarla quantitativamente, siano in grado di prevedere in quali casi si verifica, valutino correttamente gli effetti che questa può avere sulla qualità della visione e conoscano i sistemi in grado di correggerla.

### Trifoglio, Quadrifoglio, Pentafooglio, Esafoglio...

Queste aberrazioni in realtà non hanno generalmente una grossa importanza nell'economia della visione, di solito non sono molto accentuate e non c'è molto da fare per correggerle. In genere vengono "liquidate" chiamandole aberrazioni di alto ordine e il termine andrebbe bene, se non fosse che anche l'aberrazione sferica è di ordine elevato e questa invece non la possiamo trascurare. Le aberrazioni importanti sono quelle descritte prima: defocus, astigmatismo, aberrazione sferica e coma, ma quando si vedrà come funziona un aberrometro si capirà come questo non può "estrarle" da una aberrazione totale senza tenere conto anche delle rimanenti. Non è facile spiegare in cosa consiste un Trifoglio o un Quadrifoglio senza conoscere il fronte d'onda, che verrà illustrato tra poco, tuttavia si può cercare di comprenderli, almeno a grandi linee. Vi siete mai chiesti perché non esiste una aberrazione denominata Bifoglio? In realtà esiste solo che si chiama Astigmatismo.

Le due immagini (Fig. 25-26) sono una rappresentazione del fronte d'onda in scala di colori e in seguito ci sarà modo di descriverla più dettagliatamente. Assumiamo che i colori rossi corrispondano alle aree più rifrangenti e quelle blu a quelle meno rifrangenti.

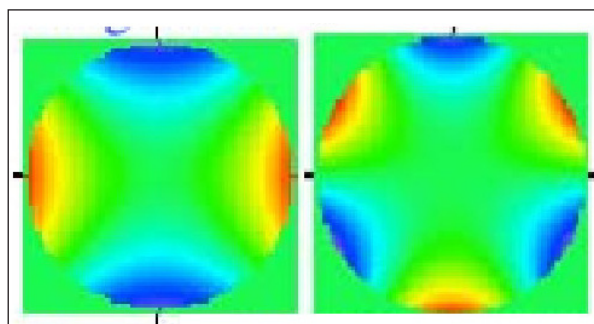


Figura 25

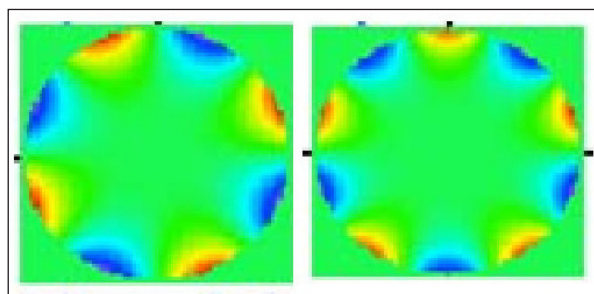


Figura 26

In realtà non è così perché la rappresentazione può cambiare, ma per il momento accettiamola, anche perché è più consona al modo di pensare di chi si è abituato ad interpretare le topografie. L'immagine di sinistra è abbastanza familiare, corrisponde ad un astigmatismo in cui il sistema ottico è più rifrangente sul meridiano orizzontale. Un obiettivo però può essere deformato in maniera irregolare per cui è necessario anche considerare altre possibili deformazioni che andranno "scorporate" dall'aberrazione totale. Il trifoglio, a cui si riferisce la seconda immagine, è una di queste, in cui si contrappongono un'area a maggiore rifrangenza con un'altra a rifrangenza minore, cioè se da un lato c'è una zona rossa, sul lato diametralmente opposto ce ne sarà una blu.

Questo tuttavia non è sufficiente, ma è necessario considerare anche situazioni più complesse. Nelle altre due figure sono rappresentati un quadrifoglio e un pentafooglio, nel primo le aree della stessa rifrangenza sono contrapposte, cioè rosso o blu sullo stesso meridiano come nell'astigmatismo, mentre nel pentafooglio sono alternate. L'esame di tutte queste possibili aberrazioni permette non solo una valutazione più completa dell'obiettivo esaminato, ma è indispensabile perché ogni singola aberrazione venga valutata senza l'influenza delle altre.

### Il fronte d'onda

Possiamo sorridere pensando che, se chiediamo ad un astronomo che cos'è un'orbita, avremo una risposta

molto diversa da quella che ci darà di un oftalmologo. D'accordo che non è questo il problema, ma non vi è dubbio che le due categorie parlino linguaggi differenti, anche se spesso trattano gli stessi argomenti. Gli aberrometri sono stati costruiti dagli ingegneri per gli astronomi e, solo in un secondo tempo, sono stati introdotti nella pratica oftalmica. Gli oftalmologi conoscono l'ottica e sono abituati a ragionare in termini di forma degli obiettivi, di vergenza dei raggi luminosi e di fuoco sul piano retinico. Gli aberrometri parlano invece in termini di fronte d'onda, spesso rappresentato in scale cromatiche, che assomigliano a quelle delle topografie corneali, pur esprimendo un concetto del tutto differente, generando così una estrema confusione. Vediamo allora di chiarire in cosa consiste un fronte d'onda. Immaginiamo di avere una sorgente luminosa puntiforme nello spazio.

Chiediamo adesso ad un oftalmologo cosa succede nel momento dell'accensione. Questi ci risponderà che dalla sorgente si originano dei raggi luminosi, che si dirigono in tutte le direzioni divergendo tra di loro. Se poniamo la stessa domanda ad un fisico o ad un astronomo ci verrà detto che, in quel momento, si genera una sfera di radiazioni elettromagnetiche, che si espande nello spazio alla velocità della luce.

Si tratta dello stesso concetto, ma la seconda risposta è più adatta ad esprimere il fronte d'onda. Questo infatti può essere definito come la superficie raggiunta contemporaneamente dalle radiazioni luminose. Possiamo anche affermare che il fronte d'onda, in un certo istante, è una superficie perpendicolare a tutti i raggi luminosi. Vediamo comunque di chiarire il concetto e torniamo allora alla nostra sorgente luminosa puntiforme. Al momento dell'accensione si genera una sfera di radiazioni elettromagnetiche, che si espande nello spazio alla velocità della luce. Dopo circa tre milionesimi di secondo la sfera avrà raggiunto il raggio di un metro. Bene, la superficie sferica di un metro di raggio corrisponde al fronte d'onda dopo tre milionesimi di secondo (Fig. 27). Se vogliamo spie-

garlo in altri termini possiamo dire che al momento dell'accensione si dipartono dalla sorgente luminosa dei raggi luminosi divergenti che, dopo tre milionesimi di secondo, avranno raggiunto la lunghezza di un metro e saranno perpendicolari alla superficie sferica di un metro di raggio, che in quel momento rappresenta il fronte d'onda.

Chiarito questo occorre adesso rivedere i concetti generali dell'ottica valutandoli dal punto di vista del fronte d'onda e non più soltanto dalla direzione dei raggi luminosi.

### L'obiettivo perfetto

Generalmente si dice che i raggi luminosi che provengono all'occhio da oggetti lontani si possono considerare come provenienti dall'infinito e quindi paralleli. In questo caso è abbastanza ovvio dedurre che il fronte d'onda è rappresentato da una superficie piana. Immaginiamo adesso che questi raggi luminosi entrino in un sistema ottico e siano fatti convergere, da un obiettivo non aberrato, su uno schermo. Tutti sappiamo che la direzione dei raggi luminosi diventa convergente su un punto situato sullo schermo e coincidente con l'asse ottico (Fig. 28). In questo caso il fronte d'onda è rappresentato da una superficie sferica, che ha la concavità rivolta verso lo schermo e il centro in corrispondenza del fuoco. Possiamo quindi affermare che, prima dell'obiettivo, il fronte d'onda era un piano e che poi è stato trasformato in una superficie sferica, in questo modo è rispettata anche la perpendicolarità rispetto ai raggi luminosi. Questo almeno è il modo di vedere degli oftalmologi, abituati a seguire il decorso dei raggi luminosi all'interno dell'occhio e a valutare le modificazioni al loro decorso indotte dall'obiettivo oculare. Adesso qualcuno potrebbe pensare che il fronte d'onda riproduce la forma della superficie diottrica che lo genera. In realtà spesso ci assomiglia, ma non è proprio così. Il fronte d'onda ideale è una calotta sferica, mentre

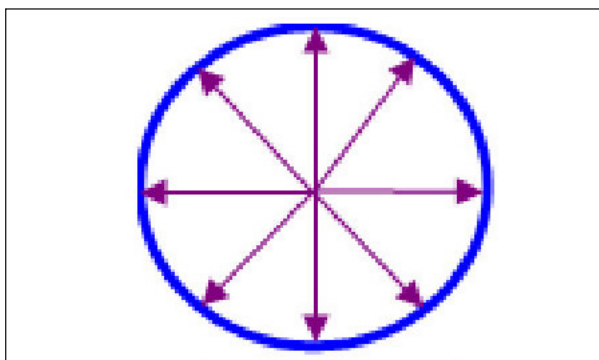


Figura 27

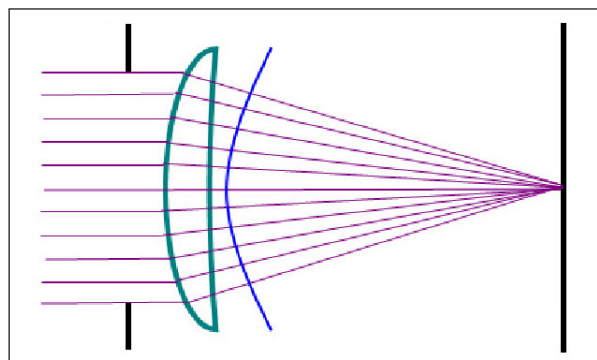


Figura 28

il diottro che lo genera ha in realtà una superficie prolata. Piccola differenza, ma superficie diotttrica e fronte d'onda sono due concetti differenti. In realtà con l'aberrometria otteniamo la forma del fronte d'onda e da qui possiamo, col ragionamento, ricavare la forma dell'obiettivo, ma non si tratta esattamente della stessa cosa, anche se le due superfici in realtà si assomigliano. Ribadiamo adesso il concetto appena illustrato. Il fronte d'onda ideale, generato da un obiettivo privo di aberrazioni, ha, all'interno dell'occhio, la forma di una calotta sferica con la concavità rivolta verso lo schermo e il centro in coincidenza del fuoco. Ogni sistema aberrato fornirà allora un fronte d'onda, la cui forma si discosta da questa calotta sferica ideale e la loro differenza esprime l'entità delle aberrazioni. Questo concetto è facilmente comprensibile da un oftalmologo, ma se a questo punto vi aspettate che questa sia la rappresentazione fornita da un aberrometro vi sbagliate. Da quanto appena affermato possiamo dire che un fronte d'onda aberrato avrà sempre la forma di una calotta, ma non più esattamente sferica con i meridiani tutti della stessa curvatura. Alcuni saranno più curvi e altri meno, oppure, come nell'aberrazione di coma, avranno una curvatura che si modifica in base alla distanza dal centro. In seguito verranno esaminati più a fondo questi concetti, quando si esaminerà il fronte d'onda per ogni singola aberrazione e tutto diventerà più chiaro. Già a questo punto però è facile capire che, anche in un fronte d'onda molto aberrato, un meridiano sarà più o meno curvo, ma comunque sempre con la concavità rivolta verso lo schermo, mai convesso. Questo infatti starebbe a significare che, in qualche punto, il potere dell'obiettivo è addirittura diventato negativo, con raggi luminosi che viaggiano divergenti. Eppure, basta dare un'occhiata alla piramide di Zernike, per osservare che quasi tutte le immagini dei vari fronti d'onda presentano in realtà anche linee curve convesse, cosa che in teoria non si dovrebbe mai verificare. Due esempi del genere sono mostrati nella *figura 29*.



Figura 29

Questo fatto, a prima vista paradossale agli occhi di un oftalmologo, ha una spiegazione molto semplice. In realtà tutti gli aberrometri assumono che il fronte d'onda ideale, formato da un obiettivo perfetto, non sia una calotta sferica, come avviene realmente, bensì una superficie piana. Di conseguenza tutte le immagini che esprimono, con una rappresentazione bidimensionale o tridimensionale, un fronte d'onda, vengono in qualche modo "raddrizzate", per poter essere paragonate ad un fronte d'onda piano. Niente di trascendentale, ma bisogna saperlo, perché non è una differenza da poco.

Per comprendere come mai lo studio dell'aberrometria si comporti in questo modo, profondamente diverso da quello in cui normalmente viene descritta l'ottica, è bene fare qualche considerazione.

- Gli aberrometri sono nati per correggere le immagini che si formano nei telescopi e solo successivamente si è pensato di utilizzarli in oftalmologia. In questo caso si tratta di osservare oggetti molto lontani, addirittura corpi celesti, da cui provengono raggi luminosi, che si possono tranquillamente considerare originati da distanza infinita e quindi paralleli con fronte d'onda piano.
- Finora si è cercato di evitare l'argomento, ma prima o poi bisognerà affrontare in maniera più o meno approfondita i polinomi di Zernike. Si vedrà allora come queste formule matematiche siano in grado di "scorporare" ogni singola aberrazione dall'esame di un fronte d'onda irregolare. Naturalmente i calcoli sono più semplici, se la differenza viene fatta nei confronti di una superficie piana piuttosto che una curva.
- Il discorso diventa ancora più chiaro se si esamina come funzionano gli aberrometri. Dal punto di vista oftalmologico, il fronte d'onda è la superficie che si forma all'interno dell'occhio dopo che la luce ha attraversato l'obiettivo oculare e che dovrebbe avere la forma di una calotta sferica. Almeno questo è sempre stato il modo di ragionare degli oftalmologi nei confronti di defocus ed astigmatismo. Gli aberrometri funzionano in un modo differente e le loro rappresentazioni cambiano di conseguenza.

## Gli aberrometri

È venuto il momento di affrontare il problema del funzionamento di questi apparecchi, che oggi sono alla base dello studio dell'aberrometria oculare e che, come si è visto, parlano un linguaggio un po' diverso da quello a cui gli oftalmologi sono abituati.



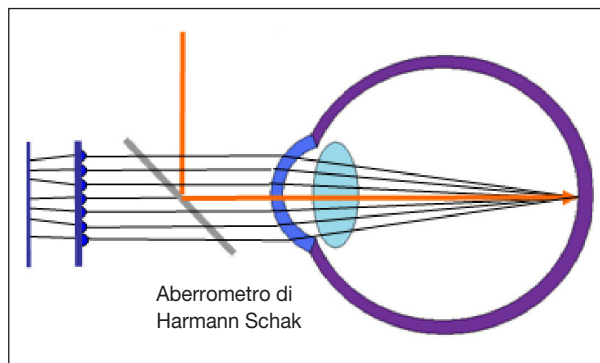


Figura 30

Uno degli aberrometri più utilizzati in campo oftalmologico si basa sul principio di Harmann Schak (Fig.30). Un fascio sottile di luce laser viene indirizzato all'interno dell'occhio, va a colpire la fovea e si riflette. Da qui si diparte un fascio di raggi luminosi, divergenti, che esce dall'occhio, attraversando l'obiettivo oculare. Se l'obiettivo non è aberrato il fascio di uscita sarà formato da raggi paralleli con un fronte d'onda piano. I raggi luminosi colpiscono un diaframma dove sono inserite delle lenti. Ciascuna di queste focalizza un raggio luminoso in un punto situato su uno schermo sensibile in grado di registrarne la posizione. Se il fascio non è aberrato ogni punto cadrà nella posizione attesa, altrimenti ci sarà uno spostamento proporzionale al grado di aberrazione. La figura 31 vuole mostrare in sintesi quello che viene rilevato dallo schermo sensibile. Il cerchio di sinistra mostra una disposizione uniforme di punti, come ci si aspetterebbe nel caso di un sistema ideale. Il cerchio centrale evidenzia invece uno spostamento dei punti rispetto alla posizione attesa, mentre quello di destra è la sovrapposizione dei primi due e mostra come molti dei puntini si vadano a focalizzare in una posizione diversa rispetto a quella che ci aspetterebbe nel caso di un sistema perfetto. Sulla base del calcolo della posizione, che ogni singolo punto assume rispetto a quella ideale, è possibile calcolare l'aberrazione del

sistema e, mediante i polinomi di Zernike, estrarre ogni singola componente (defocus, astigmatismo coma ecc.) e quantificarla.

Come si vede quindi l'aberrometro misura in effetti un fronte d'onda in uscita dall'occhio, con una direzione opposta a quella che gli oftalmologi sono abituati a considerare. È come se, in corrispondenza della fovea, ci fosse una sorgente luminosa; i raggi che provengono da questa divergono, escono dalla pupilla attraversando l'obiettivo oculare e si trasformano in un fascio con un fronte d'onda che, in un obiettivo ideale sarebbe piano e che viene poi misurato dall'apparecchio. In pratica questi misurano il fronte d'onda in uscita, con un percorso dei raggi luminosi contrario a quello reale. D'accordo che non si può fare altrimenti, non è possibile impiantare un sistema di rilevazione dei raggi luminosi nel vitreo per seguirli nel loro cammino naturale, ma è necessario capire e tenere presente come funziona questo metodo di misura. L'altro sistema su cui alcuni aberrometri si basano è quello di Tscherning. In questo apparecchio viene proiettata, all'interno dell'occhio, attraverso l'obiettivo, una griglia luminosa, formata da numerosi piccoli raggi laser, che vanno a formare una immagine sulla retina formata da tanti punti luminosi. Questa immagine viene osservata attraverso un sistema simile a quello di un oftalmoscopio indiretto e catturata da una fotocamera. Anche qui lo spostamento di ogni singolo punto rispetto alla posizione attesa fornisce una quantificazione delle aberrazioni. Come si vede la sostanza non cambia.

A questo punto occorre rivedere un po' tutte le aberrazioni che sono state esaminate fino ad ora e riconsiderarle ragionando sulla base del fronte d'onda, sia come è realmente, sia come viene rappresentato dagli aberrometri, in modo da ricondurre tutto il discorso in un linguaggio comprensibile per un oftalmologo. Si vedrà che le rappresentazioni delle aberrazioni, così

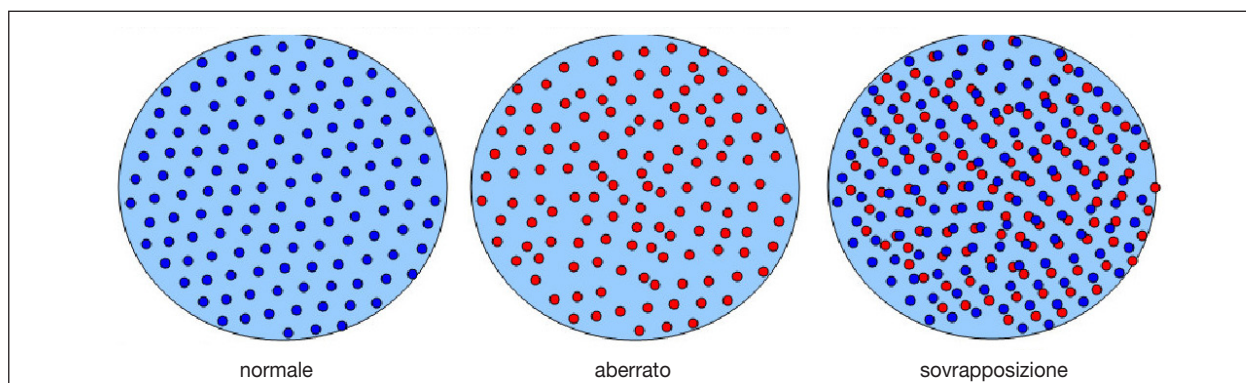


Figura 31

come vengono presentate, devono poi essere capite e adattate per metterle in relazione a quello che in realtà succede all'interno dell'occhio. Si vedrà anche che non hanno nulla a che vedere con la forma delle ottiche dell'obiettivo, anche se in qualche caso le ricordano, anche perché vengono rappresentate con colori simili a quelli della topografia, che spesso però possono trarre in inganno. Gli oftalmologi sono le persone più adatte per comprendere tutti questi fenomeni proprio perché hanno alle spalle una lunga esperienza diretta a considerare il percorso dei raggi luminosi all'interno del bulbo oculare a valutarne gli effetti sulla visione.

D'ora in poi sarà necessario esaminare, per ogni singola aberrazione, il fronte d'onda reale, che si forma all'interno del bulbo oculare dopo la rifrazione subita dall'obiettivo, che gli oftalmologi sono abituati a valutare, e paragonarlo con quello che invece viene mostrato dagli aberrometri.

## Il defocus

Vediamo adesso cosa succede in una aberrazione semplice, vale a dire nel defocus.

In questo caso l'obiettivo non presenta deformazioni, ma non è della potenza adeguata per cui non focalizza esattamente sullo schermo, ma i raggi cadono davanti o dietro di esso.

Nella parte superiore della *figura 32* è rappresentato l'esempio di una miopia, sia come schema teorico, che per illustrare quanto avviene veramente nell'occhio.

In questo caso il fronte d'onda è sempre rappresentato da una superficie sferica (rossa), ma con un raggio di curvatura inferiore rispetto al fronte d'onda ideale (verde). Nel caso di una ipermetropia avremmo una superficie sferica con un maggiore raggio di curvatura. Nel defocus quindi il fronte d'onda è sempre rappresentato da una superficie sferica, ma con un raggio di curvatura differente rispetto al fronte d'onda ottimale di riferimento.

La parte inferiore della *figura 32* illustra meglio le aberrazioni così come sono viste dagli aberrometri, sia con l'esempio di un obiettivo generico che di un occhio vero e proprio. Nella parte destra di ogni immagine è rappresentato quello che avviene all'interno dell'occhio. Si vede il fronte d'onda normale (verde) rappresentato da una superficie sferica, quello della miopia (rosso) più curvo e quello dell'ipermetropia (blu) a curvatura inferiore. A sinistra dell'obiettivo sono mostrati gli stessi fronti d'onda così come sono misurati da un aberrometro. Il normale (verde) corrisponde ad un piano, quello della miopia (rosso) ha la

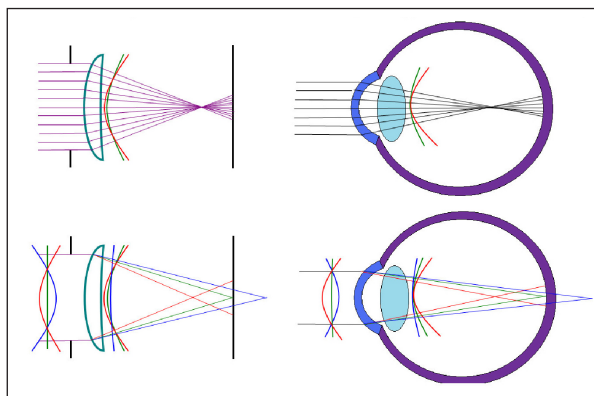


Figura 32

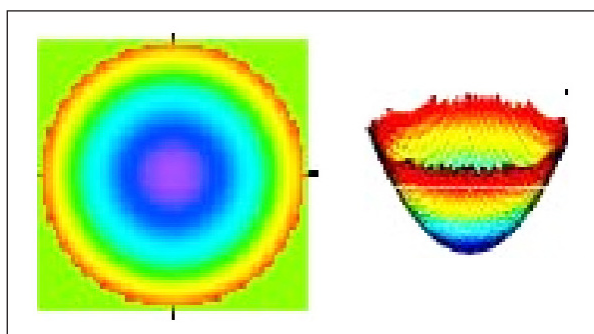


Figura 33

forma di una parabola con la concavità verso lo schermo, mentre quello dell'ipermetropia (blu) è sempre rappresentato da una parabola, ma a concavità invertita, cioè rivolta verso la sorgente luminosa. Gli aberrometri poi ci presentano il fronte d'onda aberrato come una immagine bidimensionale o tridimensionale a cui vengono attribuiti dei colori a seconda della posizione rispetto al piano del fronte d'onda ideale. A questo punto in genere si dice che ormai gli oftalmologi hanno acquisito una buona dimestichezza con queste mappe a colori grazie all'esperienza maturata con la topografia corneale. In realtà la cosa rischia invece di creare confusione. La topografia (*Fig. 33*) mostra mappe di curvatura, in cui ormai istintivamente si associa il colore rosso ad una zona di maggiore rifrangenza mentre quello blu è destinato alle zone di rifrangenza minore. Nell'aberrometria le cose sono molto diverse, i colori rossi o blu esprimono la posizione relativa rispetto al fronte d'onda normale considerato come un piano e non sono esattamente l'espressione della rifrangenza. Nella *figura 34* è descritta la rappresentazione del defocus. A sinistra c'è una calotta che vuole rappresentare il fronte d'onda dell'ipermetropia, a destra quello della miopia, mentre la linea verde descrive il fronte d'onda piano di riferimento. Le porzioni del fronte d'onda che giacciono prima (o sopra in questo caso) della linea verde



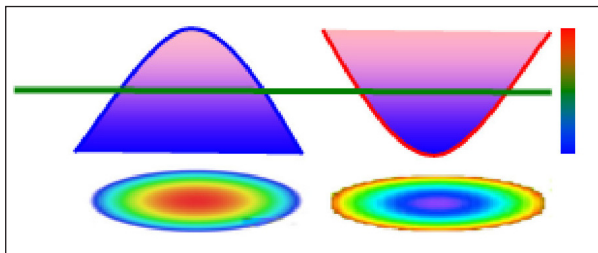


Figura 34

vengono colorate in rosso, quelle che giacciono dopo in blu, il tutto attraverso un gradiente di colori che passa attraverso le varie sfumature di verde e di giallo. Quindi la mappa di destra, quella con il blu al centro, rappresenta la miopia, mentre quella di sinistra, con il rosso al centro, l'ipermetropia.

Ribadisco che in questi casi i colori rossi e blu non hanno nulla a che vedere con aree di maggiore o minore rifrangenza. In questo caso si tratta di defocus e la rifrangenza è uguale su tutta la superficie del fronte d'onda. Se facessimo una topografia corneale a questi occhi, che presentano solo un defocus senza altre aberrazioni, probabilmente ci troveremmo una mappa uniforme, completamente verde o al massimo con una lieve prolatura centrale.

L'attribuzione dei colori è naturalmente frutto di una convenzione e qui compare il primo problema perché non tutti adottano lo stesso sistema. La descrizione precedente si riferisce all'analisi applicata dalla OPD (Optical Path Difference), mentre nel caso si applichi quella del WFE (Wave Front Error) i segni sono invertiti. Purtroppo non c'è ancora un comportamento univoco e molto spesso nelle videate e nelle stampe dei vari apparecchi non è chiaramente indicato a quale dei due sistemi si fa riferimento. Questo chiaramente aumenta la confusione e a questo punto se c'è qualche oftalmologo che si sta arrabbiando nel vedere come una semplice incapacità di comunicazione stia ulteriormente complicando un argomento già così difficile, si può consolare pensando che loro

stessi, nel trattare un argomento complicato come l'astigmatismo, hanno ideato il sistema Tabo e quello Internazionale.

## L'astigmatismo

Descrivere il fronte d'onda di un astigmatismo non è semplice. Consideriamo che un obiettivo astigmatico ha un meridiano più rifrangente ed uno meno rifrangente perpendicolari tra di loro mentre i meridiani intermedi avranno un potere refrattivo intermedio. Tutti questi meridiani hanno come fronte d'onda una superficie sferica, a diverso raggio di curvatura, tanto minore quanto maggiore è la rifrangenza. Il fronte d'onda globale sarà una superficie torica, che unisce tutte queste linee sferiche. Andiamo però nei dettagli e, tanto per farci capire dagli oftalmologi, diciamo che parleremo di astigmatismo misto. La *figura 35* è simile a quella mostrata per spiegare il defocus. Come sempre esaminiamo prima il fronte d'onda dal punto di vista "oculistico", valutando cioè quello che succede seguendo il cammino dei raggi luminosi all'interno del bulbo e poi dal punto di vista aberrometrico. A destra dell'obiettivo c'è l'immagine del fronte d'onda ideale, di forma sferica, rappresentato dalla linea verde. Quella rossa e quella blu si riferiscono invece all'astigmatismo. La rossa al meridiano più rifrangente, quindi più curva, la blu a quello meno rifrangente. I due meridiani sono perpendicolari tra di loro e la linea blu deve essere immaginata come orizzontale. Il fronte d'onda sarà una superficie distesa tra questi due che adatta la propria forma per adeguarsi alla progressiva modificazione della curvatura. In sostanza si tratta di una superficie torica.

Nella parte sinistra sono invece disegnati i due meridiani come sono misurati dall'aberrometro. La linea verde corrisponde al piano che rappresenta il fronte d'onda ideale. La linea rossa, corrispondente al meridiano più rifrangente, ha la concavità rivolta verso lo

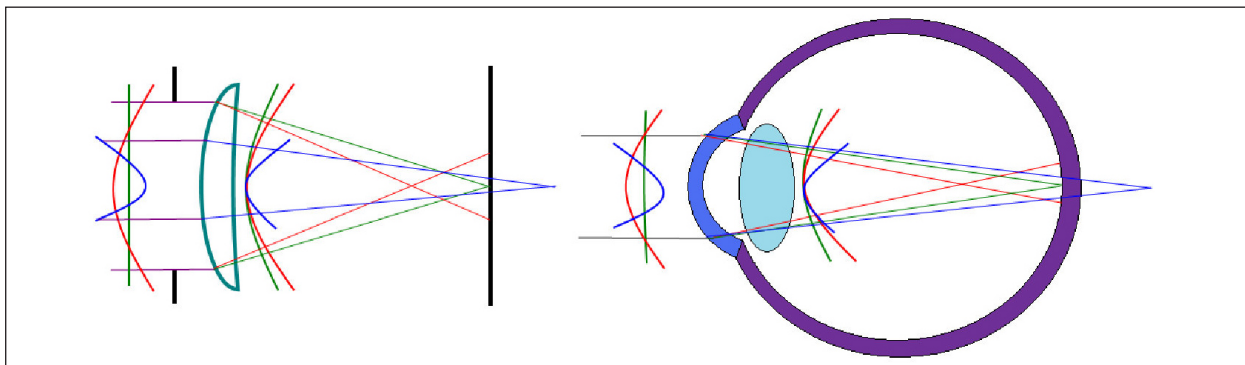


Figura 35

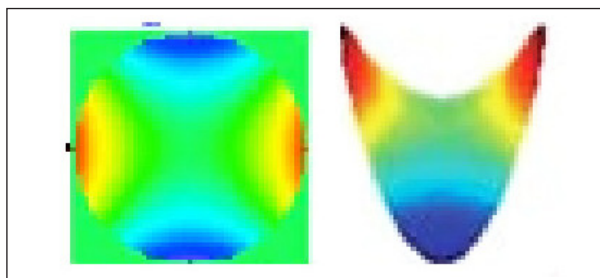


Figura 36

schermo, quella blu, meno rifrangente, ha la concavità in direzione opposta. Il fronte d'onda dell'astigmatismo ha quindi la forma di una sella, mentre la rappresentazione bidimensionale mostra una sorta di clessidra, che ricorda quella mostrata dalle topografie corneali proprio negli astigmatismi. Attenzione però a non cadere in errore. La topografia mostra un gradiente di curvatura, gli aberrometri invece mostrano la forma del fronte d'onda per di più misurato in un modo diverso da quello reale. Le due cose non sono del tutto paragonabili. Le aree colorate in rosso si riferiscono a quelle che stanno dietro al fronte d'onda ideale e quindi al meridiano meno rifrangente.

La figura 36 mostra infatti lo schema del fronte d'onda di un astigmatismo secondo regola con il meridiano verticale più curvo. La distribuzione dei colori è esattamente l'opposto rispetto a quello che ci si aspetta da una topografia, che in questo caso evidenzierebbe una clessidra rossa verticale. Tutto questo è vero se ci si riferisce all'analisi OPD, mentre per quella del WFE la situazione sarebbe opposta. In ogni caso non bisogna lasciarsi ingannare; l'abitudine alle topografie infatti induce a collegare il colore rosso alle zone più curve, cioè quelle a maggiore rifrangenza, regola che nelle aberrometrie non è affatto rispettata.

Come si è accennato all'inizio, tanto per non confondere gli oftalmologi, fin qui abbiamo parlato di astigmatismo misto, cioè quello in cui la conoide di Sturm sta a cavallo della retina. Dove sono gli altri? Vedremo meglio in seguito che il problema non si pone. I polinomi di Zernike hanno la capacità di estrarre da un fronte d'onda ogni singola aberrazione indipendentemente dalle altre. Tutte quante vengono considerate come se stessero a cavallo del fronte d'onda piano ideale, quindi tutti gli astigmatismi vengono visualizzati nello stesso modo. La loro posizione rispetto al piano retinico deve essere dedotta dalla contemporanea valutazione del defocus. La regola vale anche per le altre aberrazioni, sferica, coma ecc.

Facciamo adesso una prima incursione nella piramide di Zernike (Fig.37). Le immagini dei diversi fronti d'onda sono inserite in una struttura a piramide e

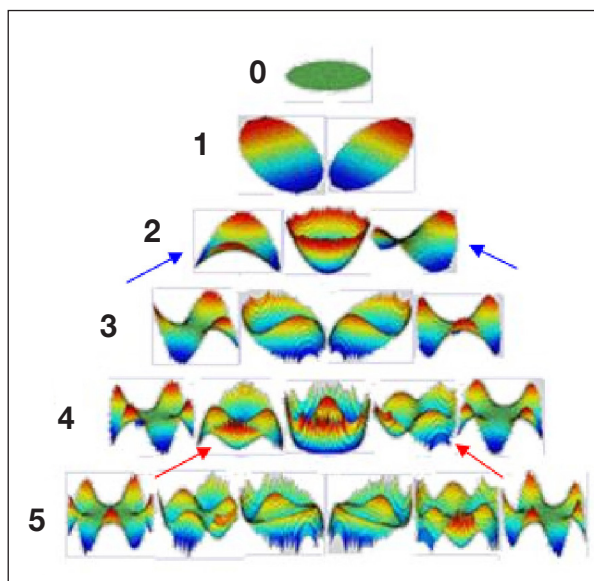


Figura 37

le linee sono numerate da 1 a 5. Questi numeri rappresentano l'ordine di ciascuna aberrazione. Per il momento è inutile spiegare in cosa consiste perché bisogna avere un'idea dei polinomi di Zernike, anche se si intuisce che rappresenta il grado di complessità di ogni singola aberrazione. Finora abbiamo considerato le aberrazioni di secondo ordine, quelle della riga contrassegnata col numero due. Come si vede ci mostra tre figure; quella centrale corrisponde al defocus, mentre la prima a sinistra è quella dell'astigmatismo. La terza figura è però ancora la rappresentazione di un astigmatismo, si tratta della stessa immagine solo che appare ruotata, in pratica mentre il primo è ad asse verticale il secondo è obliquo. Si tratta di quelle indicate con le frecce blu.

Perché nella piramide di Zernike di astigmatismi ce ne sono due?

La risposta è legata al fatto che per definire un astigmatismo è necessario specificare anche un asse di rotazione. Gli aberrometri non lavorano come gli autorefrattometri o come gli specchietti da schiascopia, ma esaminano ogni singola aberrazione scorporandola dalle altre. Da un fronte d'onda, che rappresenta una aberrazione totale, viene quindi estratta la componente corrispondente all'astigmatismo ad asse verticale, poi la stessa cosa si fa con quella corrispondente all'asse obliquo. Si otterranno quindi due aberrazioni astigmatiche e dalla prevalenza dell'una rispetto all'altra viene fatto il calcolo dell'asse. Se l'astigmatismo è esattamente verticale la seconda componente sarà nulla e tutta l'aberrazione sarà a carico della prima misurazione. Se invece l'astigmatismo non è esattamente a 90 o a 180 gradi, ci sarà un apporto maggiore

o minore di entrambe le componenti. Da questo rapporto scaturiscono l'entità e l'asse dell'astigmatismo vero e proprio. Potremmo dire che ognuna di queste due aberrazioni viene posta sul piatto di una bilancia e l'ago determinerà l'asse dell'astigmatismo totale. Questo spiega anche perché esiste una sola mappa per il defocus, dove non c'è un asse da calcolare e dove i meridiani presentano tutti la medesima curvatura.

D'accordo però sul fatto di esaminare le entità di due astigmatismi ad assi differenti e di ricavare l'astigmatismo totale in base al calcolo dell'apporto relativo di ciascuna delle due componenti, ma perché usare un astigmatismo ad assi verticali ed uno ad assi obliqui e non uno secondo regola e l'altro contro regola? Istantaneamente un oftalmologo si comporterebbe in questo modo, che renderebbe anche più facile una valutazione complessiva.

Il motivo risiede sempre nel modo in cui le mappe aberrometriche vengono calcolate con i polinomi di Zernike. Le mappe degli astigmatismi, contrariamente a quello che avviene nel defocus, presentano meridiani a curvatura differente. I polinomi di Zernike valutano questa variazione radiale di curvatura mediante una funzione trigonometrica, che esprime la curva sinusoidale che si incontra percorrendo la mappa attraverso una circonferenza equidistante dal centro, in pratica un parallelo. Adesso non è necessario comprendere a fondo questo argomento, che comunque verrà sviluppato in seguito. Basta sapere che l'astigmatismo secondo regola è espresso mediante una funzione di coseno. Quello contro regola è calcolato con la stessa funzione, solo che cambia di segno. L'astigmatismo obliquo invece si esprime attraverso una funzione di seno e quindi dal punto di vista matematico è più adatta per essere scorporata e poi paragonata alla precedente.

Le sorprese però non sono finite. Se andiamo ad osservare meglio vediamo che, nella fila numero quattro, quella corrispondente alle aberrazioni di quarto ordine, ci sono altre due immagini che rappresentano degli astigmatismi. Si tratta della seconda e della quarta, sono indicate, sempre nella piramide, dalle frecce rosse e sono denominate "secondo astigmatismo". Nella *figura 38* sono riportate le immagini bidimensionali e tridimensionali corrispondenti. Per prima cosa si osserva che i colori sono invertiti rispetto agli astigmatismi di secondo ordine, se nel primo il meridiano verticale è il più rifrangente, nel secondo astigmatismo è quello meno rifrangente e viceversa. Questa però non è la sola differenza, l'altra riguarda la forma di ogni singolo meridiano, che nel secondo astigmatismo prevede una ulteriore variazione della

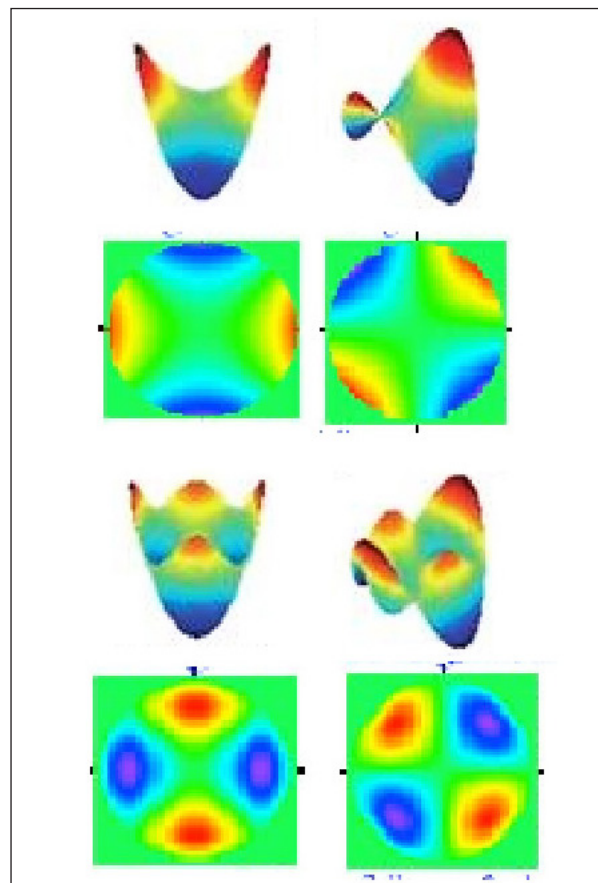


Figura 38

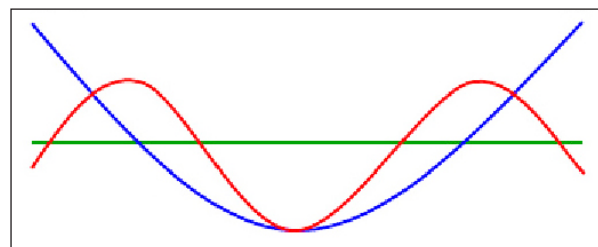


Figura 39

curvatura. Nella *figura 39* la linea blu indica la forma di un meridiano nel caso di astigmatismo, mentre la linea rossa indica la forma dello stesso meridiano nel secondo astigmatismo. Come si vede dopo un iniziale aumento in una direzione, fino a raggiungere un valore massimo, si verifica una inversione con progressiva diminuzione verso la periferia. La mappa tridimensionale illustra bene questo fenomeno.

Questa considerazione può lasciare perplesso qualche oftalmologo, che ha sempre considerato che di astigmatismi ce n'è uno solo, che si corregge con lenti cilindriche, e non ha mai sentito la necessità e nemmeno ha l'intenzione di introdurne un secondo, che gli complicherebbe soltanto la vita.

Gli astigmatismi però, anche se della stessa entità diottrica, non sono tutti uguali, le topografie hanno

insegnato che possono corrispondere a clessidre topografiche differenti per forma, dimensione o estensione periferica. Adesso però c'è da dire che ci siamo avventurati nelle aberrazioni di ordine elevato, che in genere sono poco influenti sulla visione. Tuttavia per capire l'importanza di considerarle bisogna sempre fare riferimento al modo di lavorare dei polinomi di Zernike. Questi valutano un fronte d'onda aberrato e da questo devono estrarre ogni singola componente. Se vogliamo che quelle che maggiormente ci interessano siano presentate nel modo migliore senza interferenze, occorre che l'apparecchio sappia calcolare anche quelle di ordine elevato, se non altro per eliminarle dal calcolo delle altre.

Lo stesso discorso che è stato fatto adesso per il secondo astigmatismo si riproporrà anche per l'aberrazione di coma, anche in questo caso vale lo stesso discorso. A pensarci bene però la stessa cosa andrebbe considerata anche per il defocus, anche qui potrebbe verificarsi un ulteriore incurvamento della superficie in periferia. Come mai non c'è un secondo defocus? In realtà esiste, solo che si chiama aberrazione sferica.

### L'aberrazione sferica

Nella piramide di Zernike (Fig. 40) la troviamo in quarta fila, si tratta quindi di una aberrazione di ordine elevato. È la terza, cioè quella centrale, ed è indicata dalla freccia. Si trova sotto al defocus, che però è nella seconda linea ed in effetti rappresenta una complicazione del defocus. Pur essendo una aberrazione di ordine elevato non la possiamo trascurare, perché nel meccanismo della visione ha una certa importanza, che è già stata descritta precedentemente. È interessante però esaminare il fronte d'onda reale che si

forma all'interno dell'occhio. La cosa è illustrata nella figura 41 dove nell'immagine superiore è rappresentata una aberrazione positiva, con i raggi luminosi periferici che focalizzano prima di quelli centrali. Sotto c'è quella negativa con i raggi centrali che vanno invece a fuoco prima dei periferici. Consideriamo la superiore. Come sempre il fronte d'onda normale è rappresentato dalla linea verde, mentre quello aberrato dalla linea rossa. Possiamo affermare che in questo caso il fronte d'onda che si forma all'interno dell'occhio è rappresentato, non da una calotta sferica, ma da una superficie parabolica, che al centro avrà la stessa curvatura rispetto a quello ideale, mentre in periferia la curvatura va progressivamente aumentando. Nel caso di una aberrazione sferica negativa si verifica la situazione opposta, mostrata nell'altra figura. Il fronte d'onda ha sempre la forma di una parabola, questa volta disegnata in blu, solo che la sua curvatura andrà progressivamente diminuendo dal centro verso la periferia, in accordo col fatto che i raggi periferici focalizzano dopo quelli centrali.

Precisiamo che, nel defocus, il fronte d'onda ideale è una superficie sferica, di raggio di curvatura diverso rispetto a quella ideale; nell'aberrazione sferica si tratta invece di una superficie parabolica.

Come sempre però questa rappresentazione non corrisponde a quella fornita dagli aberrometri che, come sempre, è rappresentata a sinistra dell'obiettivo. Qui il fronte d'onda normale è rappresentato da un piano e tutto deve essere "raddrizzato", per cui il fronte d'onda dell'aberrazione sferica assume una forma più complessa, con due oscillazioni che attraversano il piano di riferimento. Gli aberrometri ci presentano quindi una rappresentazione tridimensionale, che ha la forma di un cappello a sombrero, mentre la rap-

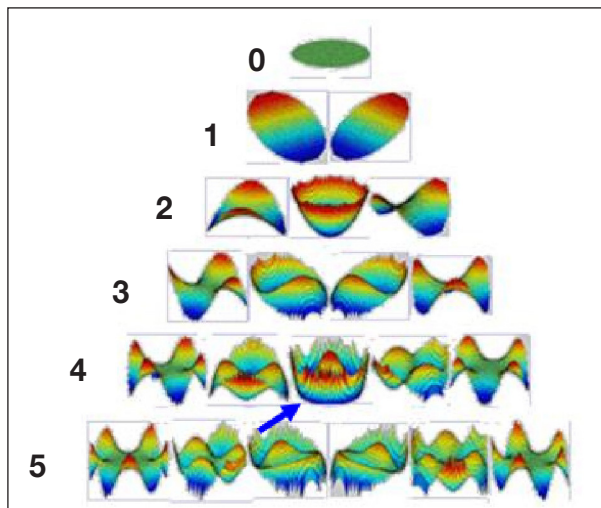


Figura 40

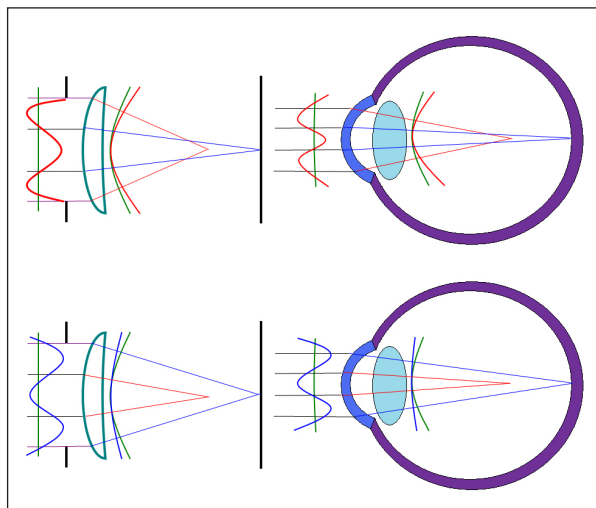


Figura 41



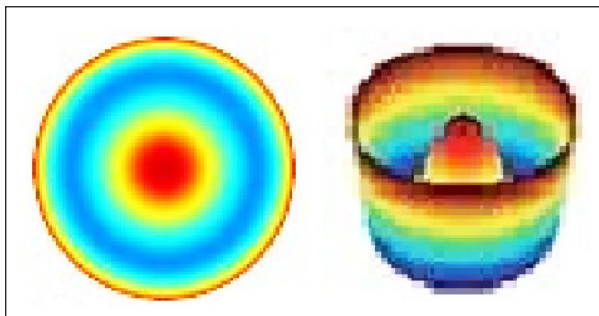


Figura 42

presentazione in due dimensioni presenta una alternanza di sfumature concentriche di rosso e di blu. A questo punto bisogna fare una considerazione su cui è opportuno riflettere e che verrà ripresa in considerazione più avanti. Utilizzando il sistema raccomandato dall'OPD, l'aberrazione sferica positiva, raffigurata nella mappa dei colori, ha il blu al centro (come la miopia), mentre in quella negativa al centro troviamo il rosso. Con il sistema WFE i colori sono naturalmente invertiti.

È curioso osservare che, nel caso dell'aberrazione sferica, il fronte d'onda ricostruito dagli aberrometri, che utilizzano un piano come sistema di riferimento, finisca con l'essere più complesso rispetto a quello reale, che si forma all'interno dell'occhio.

Non rimane molto da dire per quanto riguarda l'aberrazione sferica, le sue caratteristiche sono già state abbondantemente esaminate e si è visto che ha una certa importanza nel meccanismo della visione. È solo opportuno ricordare che anche qui, come nel caso dell'astigmatismo, l'analisi aberrometrica ci dice solo se si tratta di una aberrazione sferica positiva o negativa ed eventualmente la quantifica, ma non ci dà dirette informazioni sulla posizione della caustica in rapporto al piano retinico. Per saperlo occorre che sia valutata assieme al defocus.

### Il tilting

Questa aberrazione viene spesso trascurata. Molti oftalmologi non sanno nemmeno che esiste ed in effetti non è mai possibile evidenziarla da sola in un obiettivo oculare, ma la sua valutazione serve nel calcolo globale delle aberrazioni. Eppure non la si può definire di elevato ordine in quanto appartiene addirittura al primo, quindi meno del defocus e dell'astigmatismo. Paradossalmente è facile descriverla spiegando come viene rilevata da un aberrometro. È invece molto più difficile descrivere come può essere fatta un'ottica oculare in grado di determinarla.

L'aberrazione di tilting si può definire come quella

che si realizza quando un aberrometro, che registra i raggi luminosi che escono dall'occhio, rileva un fascio parallelo, ma inclinato rispetto a quello ideale. In questo modo i raggi aberrati formano un fronte d'onda, che è sempre rappresentato da un piano, con la differenza che si presenta inclinato rispetto a quello di riferimento.

Come si sa gli aberrometri proiettano un punto luminoso sulla fovea e registrano i raggi luminosi che si dipartono da questa ed escono dall'occhio percorrendo a ritroso l'obiettivo oculare. Da questo punto di vista è relativamente facile comprendere come si possa realizzare una aberrazione di questo genere. molto più difficile è fare il discorso contrario; cioè stabilire come si presenta in realtà un obiettivo oculare in grado di determinare una aberrazione di tilting. Per spiegarlo immaginiamo di avere un tilting con un gradiente verticale. In questo caso l'obiettivo oculare è più rifrangente in alto, mentre il suo potere si va progressivamente riducendo mano a mano che ci si sposta in basso. In altre parole l'obiettivo è miope nei settori superiori, diventa emmetrope al centro per poi diventare ipermetrope in quelli inferiori. Gli aberrometri funzionano come se una sorgente luminosa si accendesse sulla fovea. In questo caso un fascio di raggi luminosi divergenti finirebbe con l'essere trasformato effettivamente in un fascio di raggi paralleli però con una direzione inclinata. Le due situazioni sono schematicamente rappresentate nella figura 43.

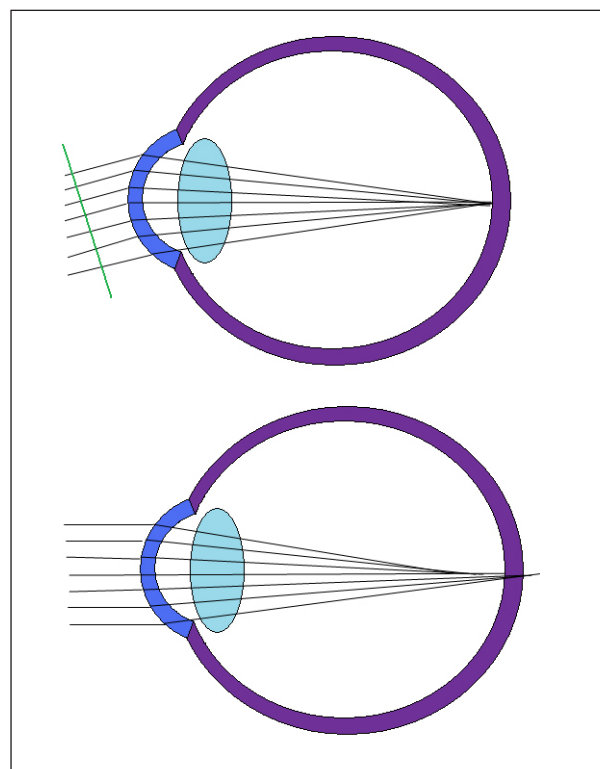


Figura 43



È vero che non si incontrerà mai un occhio che ha solo questa aberrazione, ma è possibile riscontrare una differenza di potere diottrico tra una zona e l'altra dell'obiettivo. Un sistema che tiene conto di questa aberrazione e riesce a scorporarla dalle altre, permette sicuramente una analisi accurata.

Il tilting è una aberrazione che richiede l'indicazione di un asse, come accade per gli astigmatismi. Come in questo caso ci dobbiamo quindi aspettare la rappresentazione di due tilting, uno con asse verticale ed un altro con asse obliquo. Queste sono infatti le uniche due aberrazioni che si evidenziano nella piramide di Zernike in corrispondenza di quelle di primo ordine. Come si è già visto esaminando l'astigmatismo le cose si complicavano perché era necessario tenere conto di un'altra aberrazione, il secondo astigmatismo, in cui c'era una modificazione dell'orientamento, ma soprattutto della forma dei meridiani. Esiste allora anche un secondo tilting? Effettivamente sì, solo che si chiama aberrazione di coma.

### L'aberrazione di coma

L'immagine del fronte d'onda reale di una aberrazione di coma, cioè quello che si forma realmente all'interno dell'occhio, non è facile da descrivere. L'immagine che rende meglio l'idea è quella descritta nella figura 44. Si tratta di una calotta, sempre concava verso lo schermo, di forma irregolare, che ha un punto di maggiore curvatura decentrato rispetto all'asse ottico. Inoltre la variazione di pendenza non è uguale in tutte le direzioni, ma, in questo caso, più ripida verso il basso e più dolce verso l'alto. Nella figura di destra questa forma viene sovrapposta alla calotta sferica corrispondente al fronte d'onda normale, non aberrato, che oltre ad avere una curvatura uniforme presenta anche il centro in corrispondenza dell'asse ottico. Non è esattamente la stessa cosa, ma come abbiamo già osservato in precedenza, spesso la forma del fronte d'onda ricorda quello della superficie diottrica che lo genera. In questo caso il fronte d'onda ricorda infatti l'aspetto di una cornea affetta da cheratocono.

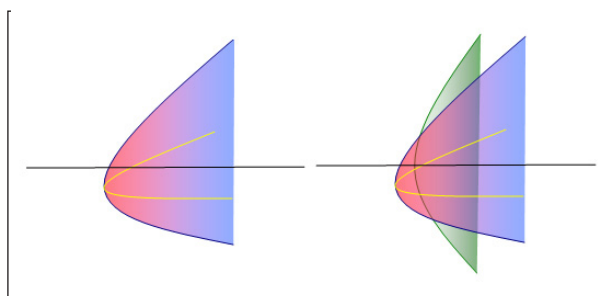


Figura 44

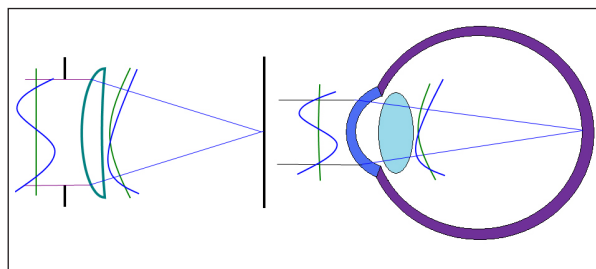


Figura 45

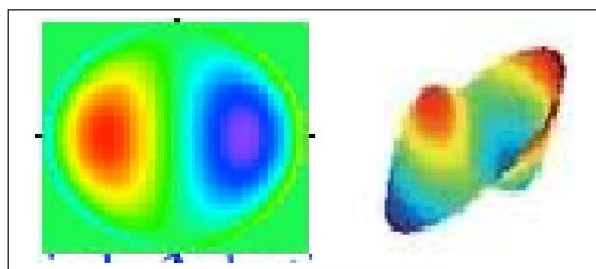


Figura 46

Come sempre dobbiamo considerare come vengono invece valutate le aberrazioni dagli aberrometri, che misurano il fronte d'onda dei raggi luminosi che escono dall'occhio e li paragonano ad un piano.

In questo caso dobbiamo "raddrizzare" la calotta sferica corrispondente al fronte d'onda normale fino a farla diventare un piano e di conseguenza anche la superficie corrispondente al fronte d'onda dell'aberrazione di coma verrà deformata in questo senso.

La curva che descrive il meridiano che unisce i due punti a maggiore e a minore rifrangenza è rappresentata nella figura 45, mentre nella figura 46 sono mostrate le rappresentazioni bidimensionale e tridimensionale, come mostrate dagli aberrometri. Come si è visto per l'astigmatismo, anche per la coma occorre specificare un asse di rotazione, ed anche questa volta viene determinato dalla valutazione di una aberrazione ad assi verticali e da una ad assi obliqui e, dalla predominanza relativa dell'una o dell'altra, verrà determinato l'asse di rotazione. Nella piramide di Zernike (Fig. 47) compaiono infatti due aberrazioni di coma, sono la seconda e la terza dei polinomi di terzo ordine e sono indicate con le frecce blu. Analogamente a quanto si è fatto per l'astigmatismo, anche questa volta è necessario considerare una seconda coma, in cui la superficie subisce un'ulteriore inversione della curvatura in periferia. Infatti queste due aberrazioni, indicate dalle frecce rosse, si ritrovano nelle posizioni centrali della linea che mostra le aberrazioni di quinto ordine. È interessante a questo punto far notare che al primo ordine la stessa posizione è occupata dal tilting, nel terzo ordine dalla coma e nel quinto dalla seconda coma. Si tratta infatti dello stesso tipo di

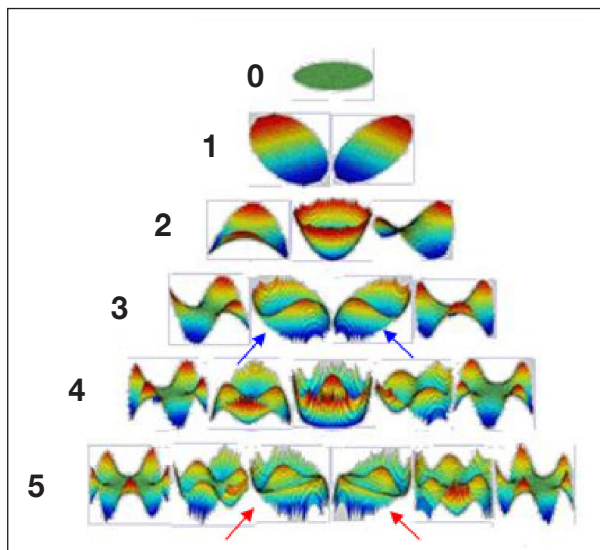


Figura 47

aberrazione in cui si ha una progressiva complicazione nella curvatura dei meridiani e compare sempre in ordini con indice dispari.

Nella posizione centrale, in corrispondenza dell'ordine zero c'è il pistone (non ha aberrazioni), nell'ordine due c'è il defocus e nel quattro l'aberrazione sferica. Anche in questo caso c'è una progressiva complicazione della curvatura dei meridiani e tutte compaiono in serie ad indice pari. L'astigmatismo compare solo tra le aberrazioni di secondo ordine, ma direttamente sotto, a livello del quarto si trova il secondo astigmatismo.

Questo rappresenta già un primo indizio che collega tra di loro le varie aberrazioni presenti nella piramide e ci indica quelle che sono in qualche modo imparentate. Vedremo meglio in seguito il significato della posizione nella piramide di ogni singola aberrazione, ma già con queste osservazioni si può cominciare ad orientarsi e a memorizzarne meglio la struttura. Un'ultima considerazione, in genere vengono mostrati gli ordini fino al quinto, ma volendo si può andare oltre ipotizzando un terzo astigmatismo, una terza coma, un esafoglio oppure un eptafoglio.

### La topoaberrometria

Parlando di aberrazioni ottiche non si può fare a meno di ricordare questa tecnica, almeno per comprenderne a grandi linee il significato.

Si tratta di una strategia abbastanza geniale per ricavare una mappa aberrometrica a partire dalla topografia corneale ed in particolare dalla mappa altitudinale. Gli aberrometri funzionano analizzando il fascio di raggi luminosi e, valutandone le deviazioni, ne calcolano le aberrazioni. La Topoaberrome-

tria analizza invece la forma della cornea e da questa deduce le deviazioni che i raggi luminosi subiranno; da qui ricava poi la mappa aberrometrica. Il modo di ragionare è quindi più simile a quello a cui gli oftalmologi sono abituati.

Non richiede quindi l'uso di un aberrometro, ma è eseguibile con un topografo dotato di un software adeguato e probabilmente ha permesso ad un grande numero di oftalmologi di avvicinarsi all'aberrometria, anche se non sono in possesso di uno strumento costoso.

Ha sostanzialmente il grande difetto di non valutare la totalità delle aberrazioni, ma solo quelle dipendenti dalla cornea, o meglio dalla sua sola superficie anteriore e non fornisce nessuna informazione riguardo alle alterazioni indotte, ad esempio, dal cristallino. Inoltre, risalendo al fronte d'onda in base alla forma della cornea, non dà indicazioni sul defocus, che infatti non viene rappresentato nelle mappe e deve quindi essere ricavato con altri mezzi.

A vantaggio di questa tecnica si può dire che le sole aberrazioni corneali rappresentano comunque il 70-80% del totale dell'obiettivo oculare e sono sostanzialmente quelle su cui andiamo ad agire con la chirurgia refrattiva. La topoaberrometria inoltre simula le aberrazioni e permette la scelta di qualunque diametro pupillare, non solo di quello reale. Infine può essere eseguita anche in presenza di opacità dei mezzi diottrici, dove gli aberrometri fallirebbero.

L'introduzione di lenti intraoculari asferiche apre la possibilità di interagire sulle aberrazioni, non solo modificando la forma della cornea come fa la chirurgia refrattiva, ma anche agendo sul cristallino. A questo punto è importante valutare prima dell'intervento una aberrometria della sola cornea per avere le idee chiare di come sarà la situazione una volta che il cristallino sarà stato asportato.

La topoaberrometria non deve quindi essere considerata un surrogato dell'aberrometria totale, utilizzabile da chi possiede solo un topografo e non può permettersi un aberrometro. In realtà fornisce dati differenti e, per avere un quadro completo delle aberrazioni e stabilire quali appartengono alla cornea e quali invece al cristallino, bisognerebbe eseguirle entrambe; non a caso sono oggi a disposizione apparecchi che lavorano in questo senso.

### I polinomi di Zernike

Adesso ci siamo, è giunto infatti il momento in cui è possibile cominciare a considerare cosa sono e in che modo vengono utilizzati i polinomi di Zernike,

anche per capire perché si sono introdotti con prepotenza nella scienza oculistica. L'esposizione che è stata fatta fino a questo punto è già sufficiente per farsi un'idea abbastanza chiara di cosa sono le aberrazioni e come vengono misurate dagli apparecchi, ma se vogliamo approfondire meglio le cose bisogna capire come vengono calcolate. Non è naturalmente indispensabile comprendere a fondo il principio matematico dei polinomi di Zernike, che peraltro è un po' troppo complicato, ma non è particolarmente difficile farsi un'idea di come funzionano e come sono costituiti. Una loro migliore conoscenza ci permette anche di renderci conto esattamente cosa si intende per ordine radiale ( $n$ ) e per frequenza ( $f$ ), che così spesso vengono nominati quando si parla di aberrometria.

Tanto per capire cominciamo dall'inizio con un argomento di statistica, che apparentemente non ha nulla a che vedere con lo studio dell'ottica.

La figura 48 rappresenta un grafico in assi cartesiani in cui sono stati posizionati dei punti, di cui immaginiamo di conoscere le coordinate. Se supponiamo che in ascisse sia indicato il tempo, i punti potrebbero rappresentare l'ammontare delle vendite di un certo prodotto nei diversi mesi, i valori di un esame di laboratorio durante il decorso di una malattia o il grado di acutezza visiva nel decorso postoperatorio di un intervento. I dati così come sono presentati però ci dicono poco, non possiamo ad esempio fare una previsione su dove saranno posizionati i dati successivi, in altre parole non possiamo estrapolarli per farci un'idea dell'andamento del parametro. Il passo successivo è allora quello di calcolare una retta, che ci indichi nel modo migliore l'andamento dei dati. Naturalmente i punti non sono sulla stessa linea, per cui è probabile che la retta non ne incontrerà nessuno, ma quale può essere quella migliore? Si tratta di un concetto abbastanza intuitivo, ma il suo significato matematico non è poi così scontato. Potremmo dire che si tratta della retta ideale, che

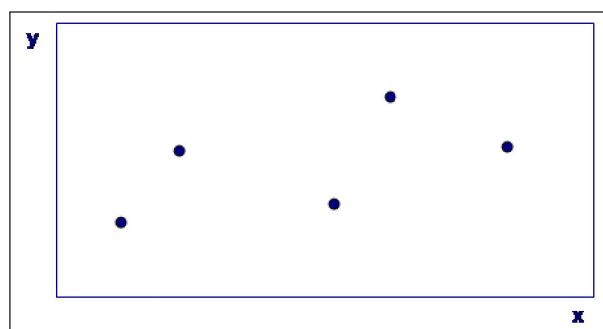


Figura 48

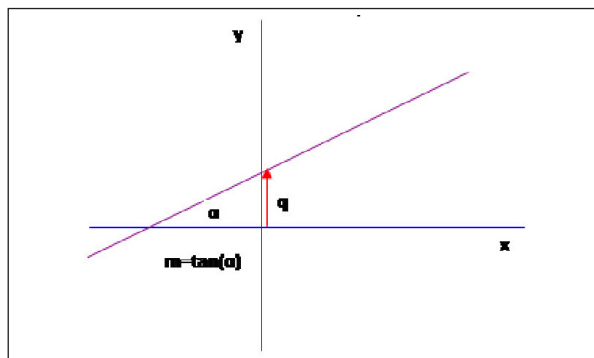


Figura 49

maggiormente si avvicina a tutti i punti, minimizzando le distanze; qualcuno la chiama retta di "best fit". Esaminiamo la cosa dal punto di vista matematico e per prima cosa ricordiamo qualche concetto di geometria analitica.

L'equazione di una retta è di primo grado e si presenta così:  $y = mx + q$

dove naturalmente  $x$  ed  $y$  rappresentano il valore di ascissa e di ordinata di ogni punto mentre:

$q$  rappresenta l'intercetta o l'ordinata all'origine, vale a dire il valore di  $y$  nel punto in cui la retta incontra l'asse delle ordinate.

$m$  rappresenta il coefficiente angolare, che esprime il valore dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse (angolo  $\alpha$  nella figura 49).

In altre parole esprime la tangente trigonometrica di quest'angolo.  $m = (y - q) / x = \tan(\alpha)$ .

Non preoccupatevi se sembra complicato, basti sapere che per conoscere le caratteristiche di una retta dobbiamo conoscere i valori di  $m$  e di  $q$ .

Adesso per prima cosa immaginiamo di scegliere uno qualunque dei punti in questione, di cui conosciamo le coordinate  $(x_i, y_i)$ , e di tracciare da questo una linea perpendicolare all'asse delle ascisse. Consideriamo poi di avere scelto una retta che ci sembra possa andare bene e di conoscerne l'equazione ( $y = mx + q$ ). Questa passerà vicino al punto in questione, senza toccarlo. Incontrerà però la linea,

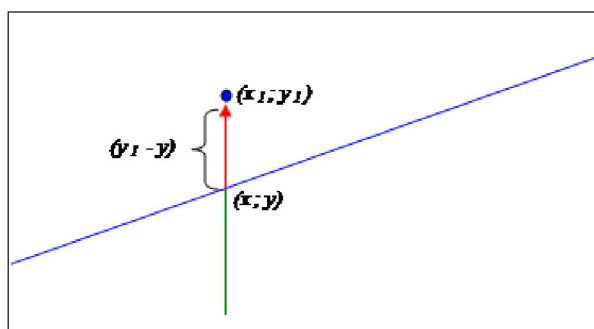


Figura 50

che abbiamo appena tracciato e, dato che conosciamo l'equazione della retta, siamo anche in grado di conoscere le coordinate di questo punto di intersezione ( $x; y$ ). L'ascissa sarà uguale a quella del punto ( $x=x_i$ ) mentre sarà possibile calcolare l'ordinata in base all'equazione della retta ( $y = mx + q$ ). La differenza tra i due valori di ordinata ( $y_i - y$ ) diventa quindi ( $y_i - (mx + q)$ ).

Questa differenza è importante, perché rappresenta lo scarto tra la posizione reale del punto in questione e quella "attesa" in base alla retta di "best fit", che rappresenta l'andamento dei parametri.

C'è ancora una cosa da precisare. Nell'esempio che è stato fatto, il punto si trova sopra alla retta e quindi la differenza tra le due ordinate è rappresentata da un valore positivo, ma se fosse posizionato sotto avremmo un valore negativo. Nel nostro caso non interessa il segno, ma è importante considerare questa differenza solo per quanto riguarda i valori assoluti. I matematici, quando vogliono inserire nei calcoli delle funzioni di cui interessa solo il valore assoluto utilizzano lo stratagemma di elevarle al quadrato, che ha sempre un valore positivo. Ne deriva che, nel calcolo statistico, il valore dello scarto viene considerato elevato al quadrato ( $y_i - (mx + q))^2$  e si parla quindi di "scarto quadratico" per definire la differenza tra il valore reale e quello atteso.

Torniamo adesso ai nostri cinque punti. Ricordiamo prima di tutto che di ognuno di questi conosciamo le coordinate, che indichiamo con  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ ,  $(x_3; y_3)$ ,  $(x_4; y_4)$ ,  $(x_5; y_5)$ . Abbiamo detto prima che vogliamo trovare la retta migliore, cioè quella che ci indica nel modo più adatto l'andamento dei dati. Questo concetto è facile da capire intuitivamente, ma dal punto di vista matematico necessita di una definizione più precisa.

Le frecce rosse della figura 51 rappresentano gli scarti, cioè le differenze tra l'ordinata di ogni punto e quella corrispondente della retta allo stesso valore di ascissa. Bene, la retta ideale, di cui al momento non conosciamo ancora l'equazione, è quella in cui la somma di tutti gli scarti quadratici è minima.

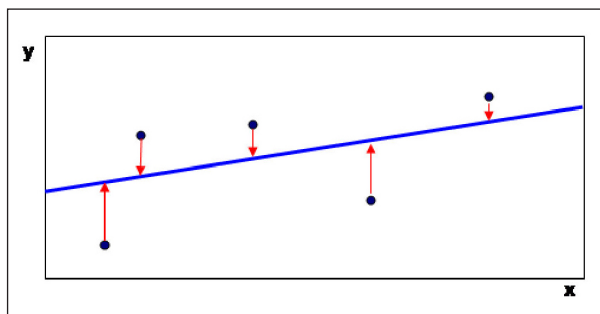


Figura 51

$$\begin{cases} nq + m\sum x_i = \sum y_i \\ q\sum x_i + m\sum (x_i)^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Figura 52

La retta della figura sembra andare bene, ma non possiamo andare per tentativi, si tratta quindi di trovare un modo per calcolarne l'equazione. La cosa non è particolarmente complicata, ma dal punto di vista matematico è un po' laboriosa. Si risolve comunque con un sistema a due incognite come quello rappresentato nella figura 52. Adesso non è necessario capire del tutto il calcolo matematico, basta sapere che è possibile eseguirlo. Per chi fosse in difficoltà bisogna poi precisare che il simbolo  $\Sigma$  sta a significare la sommatoria dei valori indicati, cioè la somma dei valori per tutti i punti che dobbiamo prendere in considerazione, che nel nostro esempio sono 5. Chiariamo meglio le cose indicando che cosa rappresentano i valori elencati nel sistema.

- $n$  rappresenta il numero dei dati, cioè quello dei punti da considerare, nel nostro caso sono cinque.
- $\sum x_i$  è la somma delle ascisse di tutti i punti che dobbiamo considerare e di cui conosciamo le coordinate. Potremmo scriverlo come  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ .
- $\sum (x_i)^2$  è la somma dei quadrati delle ascisse di tutti i punti  $((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2)$ .
- $\sum y_i$  è la somma delle ordinate di tutti i punti  $(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$ .
- $\sum x_i y_i$  è la somma dei prodotti delle ascisse e delle ordinate di tutti i punti  $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5)$ .

Da precisare che tutti i valori di  $x$  e di  $y$  che compaiono nel sistema si riferiscono ai punti e non alla retta che stiamo calcolando e di cui non conosciamo ancora l'equazione.

Si può vedere allora che quello rappresentato è un sistema a due incognite  $m$  e  $q$ , che sono poi i valori che ci servono per stabilire l'equazione della retta ( $y = mx + q$ ). Basta risolverlo e la soluzione è trovata.

È chiaro che eseguire i calcoli a mano con carta e penna diventa laborioso, anche perché quando si tratta di calcolare delle sommatorie bisogna eseguire una serie di calcoli per tutti i punti in questione, nell'esempio ne avevamo solo cinque, ma se sono centinaia la cosa si complica. Oggi ci sono comunque dei programmi che lo fanno con rapidità e ci forniscono subito l'equazione. Quella che viene calcolata è quindi la retta di "best fit", che rappresenta l'andamento ideale dei dati e ci



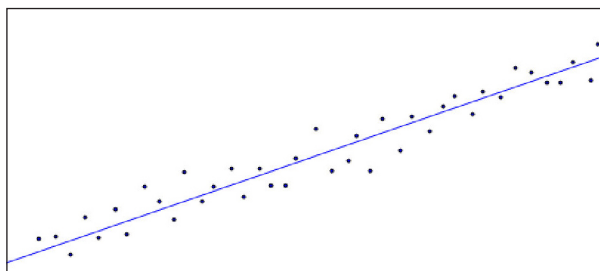


Figura 53

dice anche dove teoricamente si dovrebbe posizionare ogni punto in base all'andamento generale; ci permette anche di prevedere dove si posizioneranno quelli successivi. Per chi non se ne fosse ancora accorto si tratta della "retta di regressione lineare", detta anche "retta dei minimi quadrati", così chiamata proprio perché, per calcolarla, si utilizzano gli scarti quadratici, cioè i valori di ogni singola differenza elevata al quadrato per fare in modo che nei calcoli figurino soltanto valori positivi. Si tratta di una cosa ben conosciuta, che viene ampiamente utilizzata in campo di ricerca. Chiunque ha già visto una retta come quella indicata dalla *figura 53*, che passa attraverso una dispersione di punti e ne indica l'andamento ideale, la si trova spesso nei lavori scientifici. Adesso abbiamo descritto come si calcola una retta di regressione lineare, ma per capire cosa c'entra nello studio dell'ottica e delle aberrazioni occorre complicare ancora di più le cose. Una retta come quella descritta nella figura precedente va bene per illustrare una serie di dati dove c'è un progressivo andamento crescente, che possiamo appunto definire lineare. In altri casi però le cose vanno diversamente.

A volte si può avere un iniziale andamento crescente, fino a raggiungere un culmine, per poi avere una diminuzione. È il caso dell'andamento di un esame di laboratorio durante il decorso di una malattia o della pressione oculare durante una flogosi uveale in cui, dopo un iniziale aumento, si ha una remissione, magari determinata dalla terapia. Esaminiamo adesso la *figura 54*. La dispersione dei punti non mostra un andamento lineare. I valori delle ordinate prima

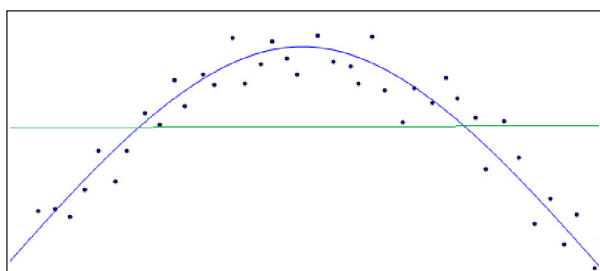


Figura 54

$$\begin{cases} n\alpha + b\sum x_i + c\sum x_i^2 = \sum y_i \\ \alpha\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ \alpha\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

Figura 55

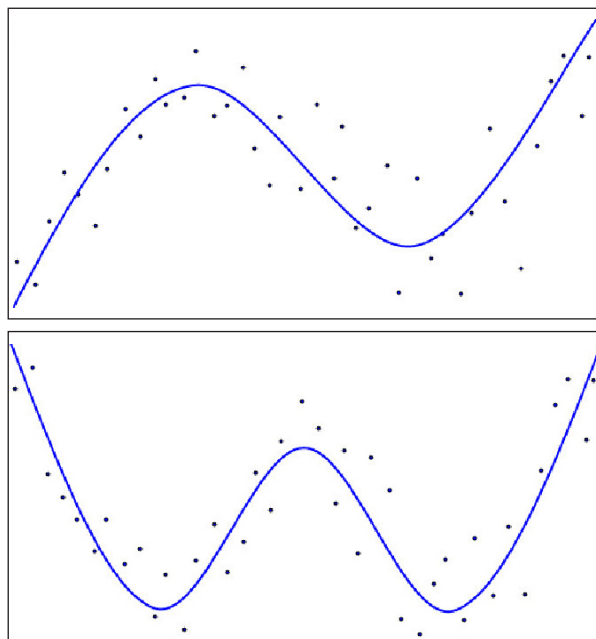


Figura 56

aumentano, ma poi tendono a diminuire dopo avere raggiunto un valore massimo. È ovvio che anche per questi punti potrebbe essere calcolata una retta di regressione lineare; risulterebbe pressoché parallela alla linea delle ascisse, come quella verde rappresentata in figura, ma non sarebbe l'ideale per descrivere l'andamento. In questo caso è molto meglio utilizzare una parabola, che però ha una equazione più complicata, anche perché è di secondo grado ( $y = ax^2 + bx + c$ ). Anche qui possiamo calcolare gli scarti quadratici per ogni punto e anche qui si può impostare un sistema, questa volta con tre equazioni e a tre incognite, con cui calcolare i valori di  $a$ ,  $b$  e  $c$  ed avere così l'equazione della parabola. Se qualcuno vuole provare a capirci qualcosa il sistema è riportato nella *figura 55*. A parte comunque la complessità, si tratta di un sistema a tre incognite in cui gli unici dati non conosciuti sono  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Basta risolverlo e si hanno tutti i dati a disposizione per ottenere l'equazione della parabola. Niente di diverso da quello che è stato fatto in precedenza, solo che i calcoli sono più complicati. A questo punto il meccanismo è chiaro e si vede come è possibi-

le adattare anche curve più complesse, di terzo o di quarto grado come negli esempi mostrati in seguito. È evidente che per ogni serie di punti, qualunque sia la loro localizzazione, sarà possibile calcolare sia una retta che una delle tante curve dei minimi quadrati, come mostrato nella *figura 57*. Si tratterà poi di stabilire quale di queste è più adatta a rappresentare l'andamento del parametro.

Come si è detto non è necessario capire a fondo come si eseguono i calcoli, ma forse adesso si hanno le idee più chiare su questo argomento.

Cosa c'entra tutto questo con i polinomi di Zernike? Frits Zernike era olandese e non aveva una mente trascurabile, tanto che nel 1953 ha vinto il premio Nobel per la fisica, anche se non per i polinomi, ma per l'invenzione del microscopio a contrasto di fase. Nei suoi studi però si è occupato anche di ottica e ha sviluppato i polinomi per correggere gli errori di aberrazione nei telescopi, tanto che c'è addirittura un cratere sulla luna che porta il suo nome, anche se non è visibile col telescopio perché si trova sulla faccia nascosta. Probabilmente non immaginava che, un giorno, i suoi studi avrebbero avuto una così grande importanza anche in campo oculistico. I polinomi non fanno altro che applicare le leggi della statistica, che sono state illustrate finora, alla dispersione dei punti che si riscontra negli aberrometri, ricavando delle formule che permettono di ricostruire delle superfici di best fit, che rappresentano le aberrazioni del sistema ottico considerato.

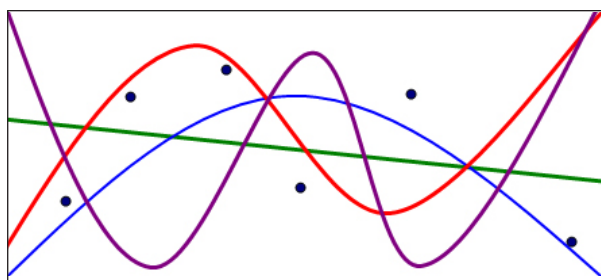


Figura 57

## Le aberrazioni

Gli aberrometri mostrano una serie di punti, questi sono devianti dalla posizione attesa a causa delle aberrazioni, per cui conosciamo la posizione reale e quella che dovrebbe essere nel caso in cui le aberrazioni non ci fossero. Su questi dati possiamo applicare il calcolo dei minimi quadrati e calcolare le curve di best fit che corrispondono ad ogni singola aberrazione. La cosa non è semplice, perché in questo caso non abbiamo a che fare con delle rette o

delle curve, ma con delle superfici tridimensionali, per cui tutto diventa più complicato e i calcoli sono di conseguenza molto più difficili. Sviluppare un sistema di calcolo matematico in grado di soddisfare queste esigenze non è facile, ma Zernike, che era figlio di due insegnanti di matematica e quindi ha probabilmente cominciato a masticare numeri fin da piccolo, c'è riuscito nel 1934 e le sue formule sono ancora attuali.

In pratica vengono esaminati i punti mostrati da un aberrometro e sui loro scostamenti vengono applicate, una alla volta, le formule per calcolare la superficie corrispondente ad ogni singola aberrazione. In questo modo è possibile stabilire l'entità del defocus, dell'astigmatismo, dell'aberrazione sferica, della coma e così via, ricavando per ciascuna aberrazione la superficie corrispondente. Ognuna di queste superfici risulta indipendente dalle altre e alla fine, sommandole tutte, si ricava l'aberrazione totale. La cosa interessante però consiste nel fatto che, da una superficie aberrata, possiamo "estrarre" la quota di astigmatismo o di coma o di una qualunque aberrazione, indipendentemente dalle altre. Purtroppo le cose sono complicate e non è facile capire nel dettaglio le formule dei polinomi, anche perché queste non lavorano con le coordinate cartesiane, ma con le coordinate polari di cui una radiale e una azimutale, cioè angolare. Non bisogna spaventarsi perché la cosa è semplice. Nella *figura 58* è rappresentato un punto di coordinate cartesiane  $(x_i, y_i)$ . La sua posizione può essere determinata anche conoscendo la lunghezza del segmento  $\rho$ , indicato dalla freccia rossa, e dall'ampiezza dell'angolo  $\theta$ .

Il segmento  $\rho$  indica la coordinata radiale, mentre l'angolo  $\theta$  quella azimutale.

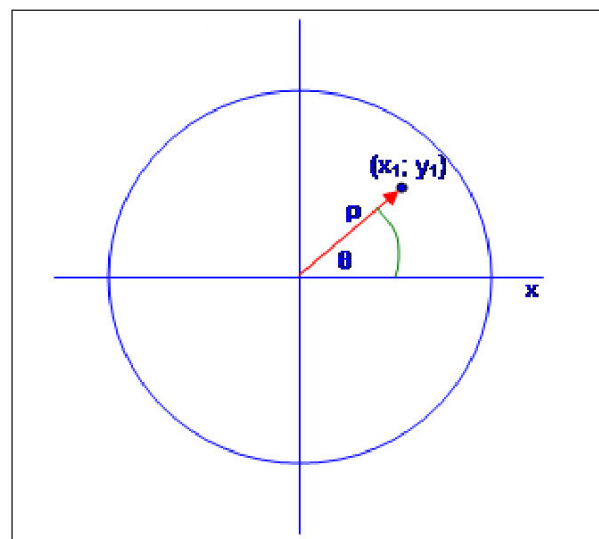


Figura 58

È facile capire come queste due coordinate si possano anche ricavare conoscendo quelle cartesiane  $(x_i, y_i)$ , infatti:

$$x_i = \rho \cos\theta \quad y_i = \rho \sin\theta \quad \rho = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

Le coordinate polari sono però più adatte ai calcoli per cui sono deputati i polinomi di Zernike. Negli aberrometri c'è una serie di punti, che appaiono spostati rispetto alla localizzazione che ci si aspetterebbe a causa delle aberrazioni. L'entità degli spostamenti viene quindi misurata per ogni singolo punto determinandone le coordinate polari ed è su questi valori che poi operano i polinomi di Zernike. Tutto questo, al momento, serve solo per capire cosa sono i valori  $\rho$  e  $\theta$  che compaiono nelle equazioni. Rimane ancora qualcosa da dire a questo riguardo, ma prima è opportuno esaminare alcune aberrazioni per renderci meglio conto della situazione



Figura 59

Per cominciare a capire è meglio valutare cosa succede nel caso del defocus. Come si è visto precedentemente l'assenza di aberrazioni è rappresentata da una superficie piana, mentre nel defocus questa assume una forma parabolica a diversa concavità a seconda che si tratti di miopia o di ipermetropia. Quella del defocus è una superficie relativamente semplice, la superficie è parabolica, ma ogni meridiano presenta la stessa forma degli altri. In altre parole c'è una perfetta simmetria tra tutti i meridiani. La parabola però è rappresentata da una curva di secondo grado ed anche il polinomio di Zernike corrispondente presenta una equazione di secondo grado:  $\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$ . Per lo stesso motivo il defocus appartiene alle aberrazioni di secondo ordine, questo infatti rappresenta il massimo esponente presente nella curva che esprime la forma del meridiano. Nel caso del defocus la curva è di secondo grado, ma nel terzo e nel quarto ordine avremo rispettivamente curve di terzo o di quarto grado.

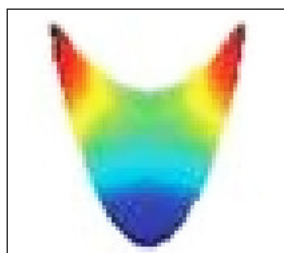


Figura 60

Anche nell'astigmatismo abbiamo una superficie curva a sezione parabolica, ma in questo caso c'è un problema dovuto al fatto che i meridiani non hanno tutti la stessa forma. Si parte dalla con-

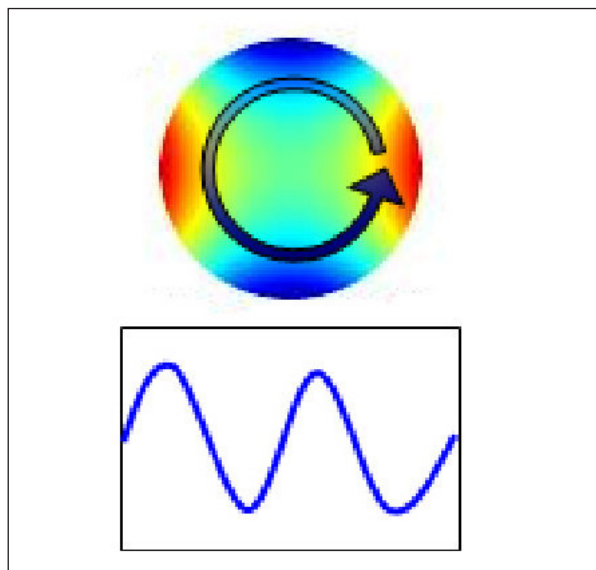


Figura 61

cavità diretta in un senso, poi, ruotando, la curva si appiattisce progressivamente per poi incurvarsi di nuovo, ma con la concavità dall'altra parte. Dal punto di vista matematico quindi l'equazione che rappresenta la parabola del meridiano non è sempre la stessa, ma cambia a seconda della rotazione, pur restando sempre una funzione parabolica di secondo grado. Introduciamo allora un altro concetto. Immaginiamo di percorrere la superficie tutto attorno, perpendicolarmente ai meridiani, mantenendoci sempre alla stessa distanza dal centro, seguiamo quindi la freccia blu indicata nella figura 61. Percorrendo tutta la circonferenza ci troviamo a salire e a scendere raggiungendo due valori massimi e due minimi, prima di trovarci di nuovo nel punto di partenza. In pratica abbiamo percorso un parallelo e in questo cammino ci siamo trovati ad oscillare, per ben due volte, sopra e sotto il piano che rappresenta la superficie di riferimento. Se riportiamo questo andamento su di un grafico otteniamo una curva con andamento oscillante, sopra e sotto la linea di riferimento. Si tratta di una sinusoide, vale a dire di una curva che può essere espressa con una funzione trigonometrica. Per esprimere la superficie relativa all'astigmatismo i polinomi di Zernike utilizzano quindi l'equazione di una parabola, che esprime la forma del meridiano, poi la moltiplicano per una funzione trigonometrica in modo da esprimere la variazione di curvatura dei meridiani in base all'asse di rotazione. Il polinomio di Zernike riferito all'astigmatismo si presenta quindi così:  $\sqrt{6}(\rho^2) \cos 2\theta$ , dove l'equazione di secondo grado relativa al meridiano viene moltiplicata per una funzione trigonometrica. Come si è già detto precedentemente

però, questa funzione esprime la superficie di best fit riferita ad un astigmatismo ad assi verticali. In pratica estrae dall'aberrazione totale la quota corrispondente ad un astigmatismo con asse  $90^\circ$   $180^\circ$ .

A questo punto occorre calcolare anche la superficie che determina la quota di astigmatismo ad asse obliquo, che ha una equazione simile alla precedente, con la differenza che l'ultima parte è rappresentata, sempre da una funzione trigonometrica, ma in cui compare il valore del seno invece del coseno:  $\sqrt{6}(\rho^2) \sin 2\theta$ . Gli astigmatismi sono quindi due, uno ad asse verticale ed uno obliquo. L'asse vero e proprio dell'obiettivo esaminato sarà determinato dal bilanciamento di queste due componenti.

Il defocus e l'astigmatismo sono stati esaminati per primi perché sono quelli che permettono di capire meglio come sono classificati i polinomi e per prima cosa vediamo di ricordarne le equazioni:

|              |                                |                     |
|--------------|--------------------------------|---------------------|
| defocus      | $\sqrt{3}(2\rho^2-1)$          |                     |
| astigmatismo | $\sqrt{6}(\rho^2)\cos 2\theta$ | (ad asse verticale) |
| astigmatismo | $\sqrt{6}(\rho^2)\sin 2\theta$ | (ad asse obliquo)   |

Per il momento consideriamo l'equazione che si riferisce all'astigmatismo ad asse verticale, come tutte le altre è costituita da tre componenti:

1.  $\sqrt{6}$
2.  $(\rho^2)$
3.  $\cos 2\theta$

La prima è definita come "fattore di normalizzazione". Non è facile da comprendere, ma basti sapere che serve a fare in modo che tutti i polinomi siano indipendenti tra di loro. È molto importante perché permette che ogni aberrazione sia mostrata indipendentemente dalle altre. È grazie a questo che possiamo avere una aberrazione, per esempio astigmatica, estratta da quella totale.

La seconda è la componente radiale ed infatti vi compare il simbolo  $\rho$ . Nel caso dell'astigmatismo è rappresentata da una parabola, che ha una equazione di secondo grado, ed infatti il simbolo  $\rho$  è elevato al quadrato. Il grado di questa equazione (secondo in questo caso) indica l'ordine radiale del polinomio corrispondente e l'astigmatismo è infatti una aberrazione di secondo ordine. Come vedremo altri polinomi esprimono curve di terzo o di quarto grado e saranno quindi di terzo o quarto ordine.

L'ultima componente è quella angolare. Come si è detto, nel caso dell'astigmatismo, i meridiani non sono tutti uguali, ma si modificano a seconda dell'asse di rotazione, per cui, per descrivere la forma della superficie, non è sufficiente esprimere il

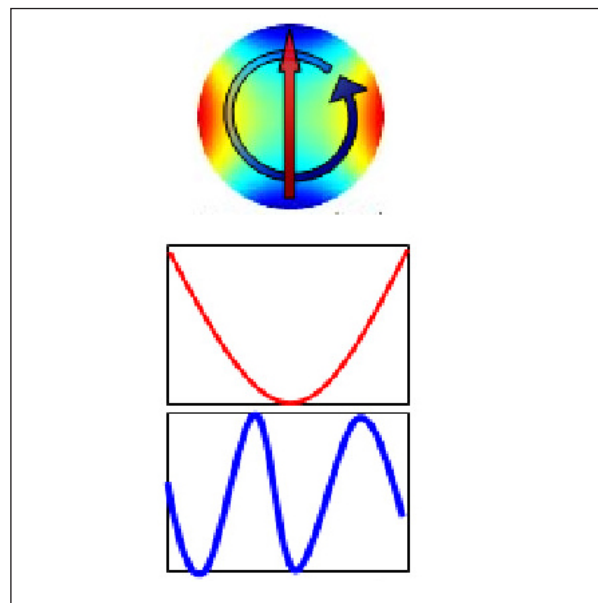


Figura 62

meridiano, ma l'equazione che lo rappresenta deve essere moltiplicata per una funzione trigonometrica, che esprime le sue modificazioni a seconda della componente angolare.

Nel defocus non abbiamo questo problema, in questo caso i meridiani hanno tutti la stessa forma e quindi non è necessario considerare una variazione angolare. Questo è dimostrato dal fatto che, nel polinomio che si riferisce al defocus  $[\sqrt{3}(2\rho^2-1)]$ , appartenente sempre al secondo ordine radiale, manca la componente trigonometrica.

Torniamo all'astigmatismo ed esaminiamo la figura 62. La freccia rossa rappresenta un meridiano che, come si sa ha la forma di una parabola. La freccia blu indica invece la componente angolare. Nel riquadro sottostante è rappresentata in rosso la forma del meridiano, che in questo caso è una parabola. Nell'altro riquadro è disegnata, in blu, la curva che si riferisce alla componente angolare e che ha la forma di una sinusoide. Questa, nel caso che stiamo esaminando, presenta due oscillazioni, vale a dire che percorrendo tutta la circonferenza dobbiamo salire e scendere, per due volte, sopra e sotto il piano di riferimento prima di ritrovarci nel punto di partenza.

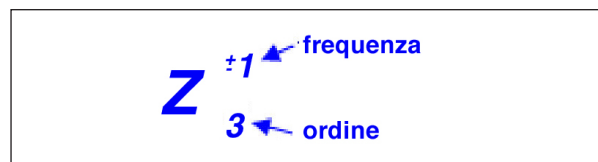


Figura 63



Riassumendo possiamo dire che, nel caso dell'astigmatismo, la forma del meridiano è rappresentata da una curva di secondo grado e la componente angolare da una sinusoide con due oscillazioni. Questa osservazione è importante, perché queste definizioni sono alla base della notazione dei polinomi di Zernike, che sono tutti definiti in base ad un ordine e ad una frequenza.

L'ordine corrisponde al grado dell'equazione della curva della componente radiale, che esprime il meridiano. In questo caso si tratta di una equazione di secondo grado per cui l'ordine è 2.

La frequenza è data invece dal numero di oscillazioni presenti nella curva sinusoidale, in questo caso sono ancora due, per cui la frequenza dell'astigmatismo è di 2. Qui però bisogna fare una distinzione, sappiamo che c'è un astigmatismo ad asse verticale, espresso da una funzione di coseno, ed uno obliquo, espresso con una funzione di seno. Alla frequenza del primo viene attribuito un valore positivo (+2), mentre al secondo negativo (-2).

Nella notazione degli Zernike l'ordine viene indicato come sottoscritto e la frequenza come sovrascritta, come mostrato nella figura 63. Dopo queste precisazioni siamo adesso in grado di scrivere per esteso i polinomi che si riferiscono agli astigmatismi:

$$Z_2^2 \sqrt{6}(\rho^2)\cos 2\theta \quad Z_2^{-2} \sqrt{6}(\rho^2)\sin 2\theta$$

Adesso che abbiamo definito cosa si intende per ordine radiale e per frequenza andiamo ad esaminare di nuovo le aberrazioni alla luce di quanto si è appreso.

Nel defocus il problema della componente angolare non si pone. In questo caso tutti i meridiani hanno la stessa forma parabolica ed infatti, nel polinomio che si riferisce al defocus, manca la funzione trigonometrica. Il defocus appartiene sempre alle aberrazioni di secondo ordine perché la curva che caratterizza il meridiano è sempre una parabola, ma alla frequenza verrà attribuito un valore di zero.

Il polinomio del defocus è quindi:  $Z_0^0 \sqrt{3}(2\rho^2-1)$

Come si è accennato in precedenza, per ogni aberrazione, come l'astigmatismo o la coma, si può immaginare un'altra aberrazione, della stessa frequenza, ma in cui si complica la forma del meridiano generando un secondo astigmatismo o una seconda coma. Anche per il defocus accade la stessa cosa, nella piramide di Zernike si può trovare un secondo defocus, che però prende il nome di aberrazione sferica. In questo caso la frequenza è sempre uguale a zero, nel senso che i meridiani sono sempre tutti

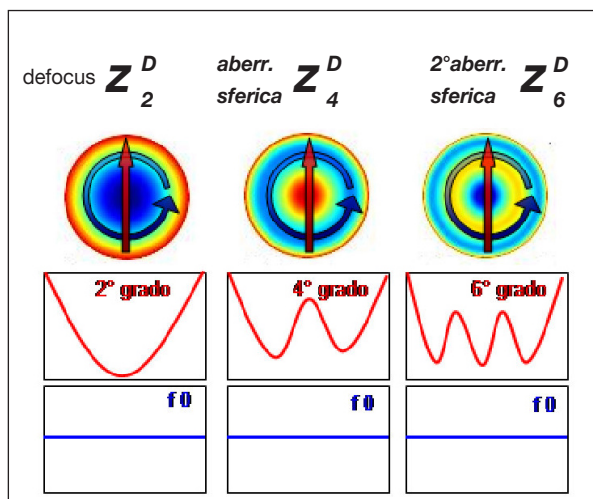


Figura 64

uguali tra di loro, solo che ognuno oscilla ulteriormente in periferia, disegnando una curva di quarto grado. Nella figura 64 la prima immagine a sinistra mostra l'immagine del defocus in scala di colori. La freccia rossa indica il meridiano e, nel riquadro sottostante, sempre in rosso, è disegnata la curva corrispondente, che ha la forma di una parabola. La linea circolare blu indica la frequenza e scorre lungo tutta la circonferenza. Dato che in questo caso non ci sono modificazioni altitudinali viene rappresentata con una retta e viene riportata nel riquadro inferiore, sempre di colore blu.

L'immagine centrale mostra l'aberrazione sferica con le stesse caratteristiche. La frequenza è sempre uguale a zero, ma la forma del meridiano si modifica disegnando una curva di 4° grado.

Nella rappresentazione della piramide di Zernike ci si limita in genere al quinto ordine, ma si può andare oltre, in alcuni casi vengono mostrate aberrazioni fino al settimo. L'ultima immagine si riferisce infatti a quella che viene definita come seconda aberrazione sferica, sempre con frequenza uguale a zero, ma con una curva del meridiano di 6° grado e quindi appartenente al 6° ordine di Zernike.

Si può fare la stessa cosa con l'astigmatismo (Fig. 65). Anche in questo caso la curva che descrive il meridiano è una parabola, quindi una curva di secondo grado e l'aberrazione appartiene quindi al secondo ordine di Zernike, come il defocus. La freccia circolare blu descrive la componente angolare e nella figura si può osservare che la linea blu effettua due oscillazioni. Nell'astigmatismo la frequenza è quindi uguale a  $\pm 2$ . Ribadisco che tutte le aberrazioni con frequenza diversa da zero hanno una doppia rappresentazione,

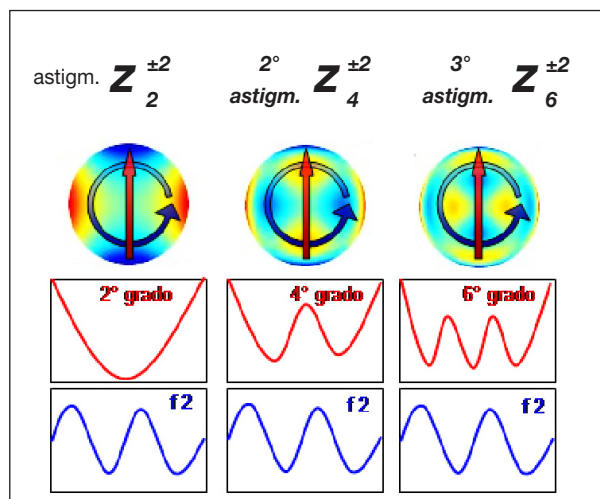


Figura 65

ad assi verticali ed obliqui, rappresentate dalla frequenza positiva oppure negativa.

La seconda e la terza figura rappresentano rispettivamente il secondo e il terzo astigmatismo, appartenenti al quarto e al sesto ordine di Zernike. Da notare che le curve radiali, quelle che esprimono i meridiani, sono le stesse del defocus e dell'aberrazione sferica (prima e seconda). Anche qui si parte da una parabola e poi la curva diventa più complessa diventando di quarto e sesto grado. La frequenza rimane naturalmente invariata.

Se avete capito il meccanismo facciamo la stessa cosa col tilting (Fig. 66). Nella prima figura viene sempre mostrata l'immagine in scala di colori. In questo caso la componente radiale, espressa dalla freccia rossa, non subisce oscillazioni, ma c'è solo una modificazione regolare della pendenza. L'equazione che esprime questa componente è infatti una retta che ha un'equazione di primo grado ed il tilting è in-

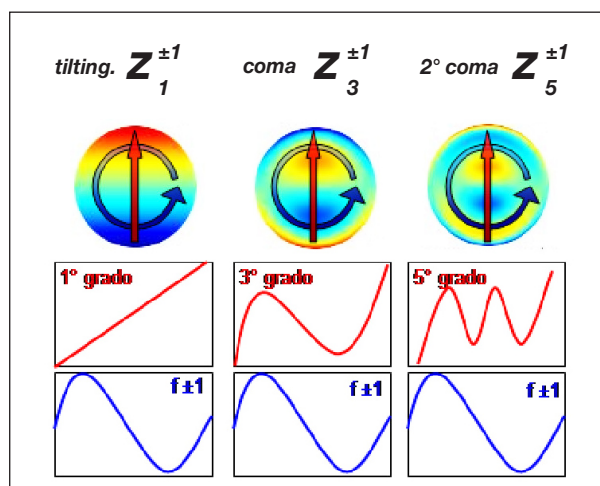


Figura 66

fatti una aberrazione di primo ordine. La frequenza però non è di zero, come nel caso del defocus, ma la freccia blu, nel seguire la circonferenza, esegue una oscillazione, (una sola e non due come nel caso dell'astigmatismo) che corrisponde ad una frequenza di  $\pm 1$ .

Anche qui però le cose si possono complicare. Il meridiano si può incurvare e disegnare una curva di terzo grado. In teoria si tratta del secondo tilting, che prende il nome di aberrazione di coma. Questa è illustrata nel riquadro centrale ed è una aberrazione di terzo ordine, sempre con frequenza di  $\pm 1$ . Se esploriamo la piramide di Zernike e andiamo a guardare nelle aberrazioni di quinto ordine troviamo anche una seconda coma, che è quella illustrata nella terza figura.

Ormai il meccanismo dovrebbe essere chiaro e, tanto per completezza, possiamo permetterci di esaminare anche aberrazioni più complesse. Nella figura 67 sono mostrate, sempre con lo stesso principio, il trifoglio, il quadrifoglio e il pentafoglio.

Attenzione però, nei casi precedenti abbiamo mostrato gruppi di aberrazioni che avevano tutte la stessa frequenza, ma ordine differente [(tilting→coma→2°coma) (defocus→aberrazione sferica→2° aberrazione sferica)].

Adesso non è più possibile, nella figura compaiono aberrazioni in cui contemporaneamente crescono sia l'ordine che la frequenza. Il trifoglio è di 3° ordine con frequenza  $\pm 3$ , il quadrifoglio di 4° ordine e di frequenza  $\pm 4$ . A questo punto è interessante osservare che, nel caso del trifoglio, lungo un meridiano si alternano una zona rossa e una blu, la stessa cosa accade anche nel pentafoglio e in generale in tutte le aberrazioni con frequenza dispari. Nel quadrifoglio invece e in tutte le aberrazioni con frequenza pari le

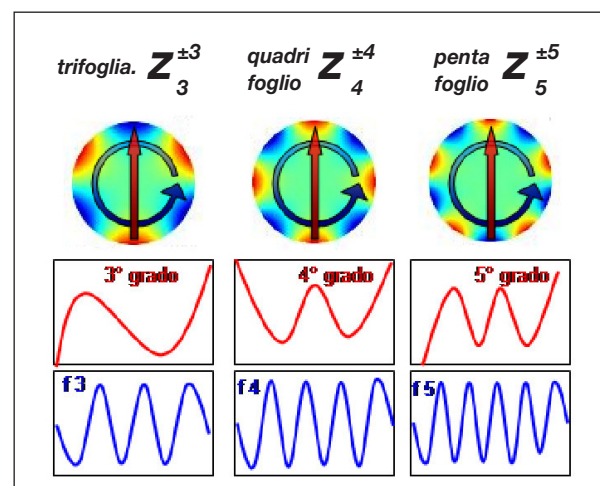


Figura 67

aree rosse e blu sono contrapposte. Se poi andiamo a cercare nelle aberrazioni di 5° ordine troviamo un secondo trifoglio ( $Z_5^{\pm 3}$ ) in cui la frequenza è sempre la stessa, ma la componente radiale si complica e forma una curva rappresentata da una equazione di quinto grado. Si è già detto che, in genere, la rappresentazione dei polinomi di Zernike si ferma al quinto ordine, ma in certi casi vengono mostrate piramidi fino al settimo. Se si va a curiosare in queste, nelle ultime file troviamo l'esafoglio ( $Z_6^{\pm 6}$ ) e l'eptafoglio ( $Z_7^{\pm 7}$ ), ci sono anche una seconda aberrazione sferica ( $Z_6^0$ ) e un terzo astigmatismo ( $Z_6^{\pm 2}$ ).

## La piramide di Zernike

Di solito quando si parla di aberrazioni questo è il primo argomento che viene trattato, ma qui si è preferito prima descrivere dettagliatamente ogni singola aberrazione e chiarire cosa si intende per ordine e per frequenza, in modo che ci si possa orientare più facilmente all'interno della piramide. (Fig. 68)

All'apice c'è il pistone ( $Z_0^0$ ), si tratta della superficie di riferimento. Scendendo verso il basso troviamo aberrazioni di ordine progressivamente più elevato, mentre spostandoci lateralmente si ha un aumento della frequenza, positiva verso destra e negativa verso sinistra.

Lungo l'asse della piramide troviamo le aberrazioni simmetriche, vale a dire quelle che non presentano modificazioni in base all'orientamento angolare dei meridiani e che quindi hanno una frequenza di zero. Oltre al pistone troviamo il defocus ( $Z_2^0$ ) e l'aberrazione sferica ( $Z_4^0$ ). Se scendessimo fino al sesto ordine troveremmo anche una seconda aberrazione sferica

( $Z_6^0$ ). Tutte queste hanno un'unica rappresentazione, non hanno infatti una frequenza positiva o negativa ed è per questo motivo che sono situate lungo l'asse della piramide. Tutte le altre hanno una doppia rappresentazione. Nella seconda fila, in corrispondenza delle aberrazioni di primo ordine, troviamo il tilting ( $Z_1^{\pm 1}$ ), con due riproduzioni, ad assi verticali ed obliqui, in accordo col fatto che i meridiani si modificano in relazione all'orientamento angolare. Direttamente sotto il tilting, nella fila delle aberrazioni di terzo ordine, troviamo la coma ( $Z_3^{\pm 1}$ ) e ancora più giù, in quella corrispondente al quinto ordine, la seconda coma ( $Z_5^{\pm 1}$ ). Se ci avventurassimo fino a quelle di settimo troveremmo anche una terza coma ( $Z_7^{\pm 1}$ ).

La fila corrispondente al secondo ordine presenta tre aberrazioni. Quella centrale è il defocus, le altre due rappresentano gli astigmatismi ( $Z_2^{\pm 2}$ ), tutte hanno i meridiani che presentano una forma parabolica. Direttamente sotto all'astigmatismo, nella fila del quarto ordine, c'è il secondo astigmatismo ( $Z_4^{\pm 2}$ ) e scendendo ancora fino al sesto ne troveremmo anche un terzo ( $Z_6^{\pm 2}$ ).

La fila successiva corrisponde al terzo ordine, conosciamo già le due aberrazioni centrali, si tratta della coma, mentre le due più esterne sono il trifoglio ( $Z_3^{\pm 3}$ ). Nella fila del quinto ordine, direttamente sotto al trifoglio, troviamo il secondo trifoglio ( $Z_5^{\pm 3}$ ) e nella fila del settimo ordine ne troveremmo anche un terzo ( $Z_7^{\pm 3}$ ).

L'aberrazione sferica si trova al centro della fila delle aberrazioni di quarto ordine e ai lati presenta le due del secondo astigmatismo. Ancora più lateralmente c'è il quadrifoglio ( $Z_4^{\pm 4}$ ), questo infatti presenta sempre il meridiano formato da una curva di quarto grado, ma con un aumento della frequenza angolare. Nelle aberrazioni di sesto ordine troveremmo anche un secondo quadrifoglio ( $Z_6^{\pm 4}$ ).

Le aberrazioni dell'ultima fila rappresentata nella figura sono quelle di quinto ordine e sono già state tutte esaminate, meno le due più esterne che mostrano il pentafiglio ( $Z_5^{\pm 5}$ ), nella fila del settimo ordine troveremmo anche il secondo pentafiglio ( $Z_7^{\pm 5}$ ).

I polinomi fino al terzo ordine vengono definiti di "basso ordine", mentre quelli di "alto ordine" sono dal quarto in poi, che in genere sono meno influenti sulla visione. Quelli che contano sono quindi il defocus, l'astigmatismo e la coma, ma anche l'aberrazione sferica, appartenete al quarto, spesso ha la sua importanza, specialmente in occhi sottoposti a chirurgia refrattiva.

A questo punto dovrebbe essere chiaro il meccanismo con cui vengono classificati i polinomi di

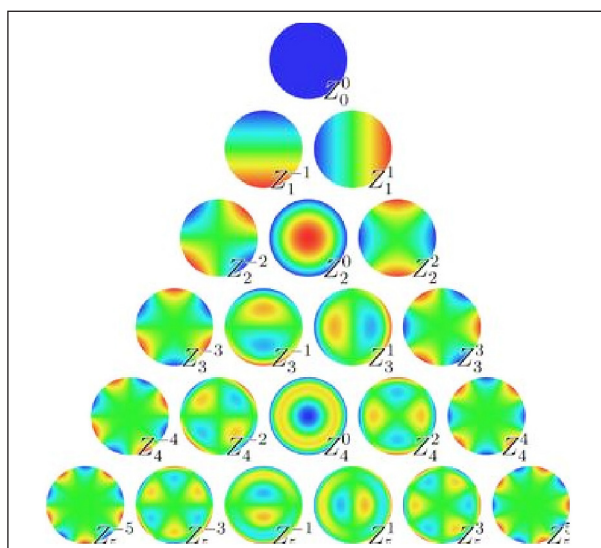


Figura 68



Zernike e come vengono disposti nella piramide. È evidente allora che i polinomi sono teoricamente infiniti, potremmo infatti continuare indefinitamente a scendere verso basso, aggiungendo ordini superiori, con curve dei meridiani espressi da equazioni di grado sempre più elevato, che rappresenterebbero il quarto astigmatismo o la quinta coma. Dall'altra parte peraltro, possiamo considerare frequenze sempre maggiori e immaginare l'ottafoglio, il nonafoglio o il decafolgio. In genere comunque non si supera il settimo ordine ed è questo il più elevato rappresentato dagli apparecchi.

### La rappresentazione e la misura delle aberrazioni

Le aberrazioni vengono presentate come immagini in scala di colori o anche come ricostruzione tridimensionale. I colori sono i soliti, che vanno dal blu al rosso attraverso le varie sfumature di verde e giallo e sono gli stessi che si trovano nelle topografie, ma proprio per questo possono disorientare, perché in aberrometria non hanno lo stesso significato e la cosa merita qualche precisazione. Ipotizziamo che il fronte d'onda vada da destra verso sinistra, nella direzione delle frecce, così come è classicamente rappresentato nella struttura degli aberrometri. Nella *figura 69* la linea verde rappresenta il piano di riferimento e le parabole rappresentano il fronte d'onda del defocus, miopia a sinistra (rossa con concavità verso la provenienza dei raggi) ed ipermetropia a destra (blu con concavità verso la direzione dei raggi). In aberrometria quello che sta prima del piano di riferimento viene raffigurato in rosso, quello che sta dopo in blu. Nella parte inferiore sono quindi riportate le mappe in scala di colori e, come si può vedere, la miopia ha il blu al centro e il rosso in periferia, mentre nell'ipermetropia i colori sono al contrario. La stessa cosa

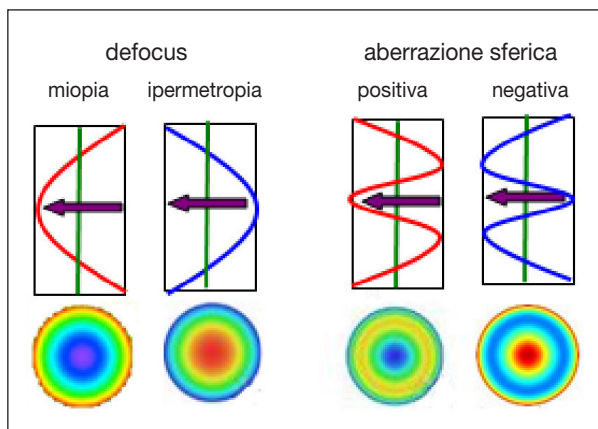


Figura 69 e 70

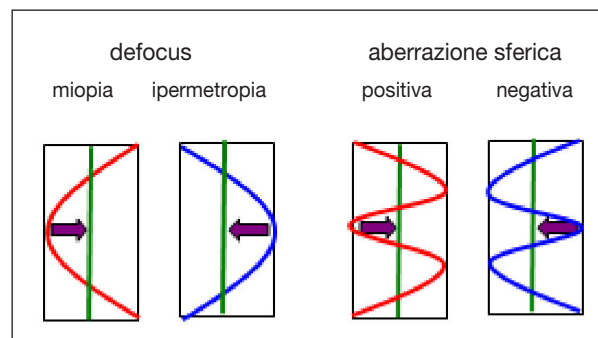


Figura 71 e 72

vale per l'aberrazione sferica che può essere positiva o negativa. La positiva ha il blu al centro, mentre nella negativa c'è il rosso. Questo almeno è quello che si vede nella rappresentazione secondo l'OPD mentre per il WFE i colori sarebbero invertiti. Bisogna quindi che ciascuno sappia quale sistema utilizza il proprio apparecchio. In molti casi c'è la possibilità di selezionare l'uno o l'altro, ma a volte non è nemmeno indicato bene quale è quello di riferimento. Per semplicità adesso seguiremo la rappresentazione secondo il sistema OPD, basta sapere che nell'altro bisogna invertire i colori. Si è visto quindi come sono disposti i colori nelle rappresentazioni cromatiche e con queste bisogna cominciare a farsi una certa esperienza perché ci permettono di capire a colpo d'occhio il tipo e l'entità di una aberrazione.

Ma le aberrazioni come si misurano? La risposta non è semplicissima; spesso si ha una quantificazione in micron, che rappresenta la massima distanza tra la curva dell'aberrazione e il piano di riferimento. In pratica si tratta delle distanze rappresentate dalle frecce nelle *figure 71 e 72*. Nel caso del defocus avremo una misura positiva per l'ipermetropia, e negativa per la miopia e la stessa cosa accade anche per l'aberrazione sferica. Queste però sono le uniche in cui c'è un segno più o meno nella misura, in tutte le altre i valori sono sempre solo positivi. Nelle altre aberrazioni infatti non c'è più una curva con una concavità in un senso o nell'altro, ma la superficie sta a cavallo del piano di riferimento, e i meridiani possono avere la concavità rivolta in entrambe le direzioni a seconda dell'orientamento angolare. Quindi nelle aberrazioni non simmetriche, in pratica tutte con l'esclusione del defocus e dell'aberrazione sferica (prima e seconda), abbiamo contemporaneamente meridiani con concavità opposte rispetto al piano di riferimento. La distanza può essere ugualmente misurata, ma qui non avremo più valori positivi o negativi e tutte le distanze saranno indicate in valore assoluto. Tutte queste aberrazioni hanno però una doppia rappresentazione, ad



assi verticali ed obliqui. A pensarci bene una aberrazione sferica può essere positiva o negativa indipendentemente dalla posizione relativa della caustica rispetto alla retina. Un astigmatismo invece non sarà positivo o negativo, ma se mai secondo o contro regola. Questa differenza è data però dal bilanciamento delle due aberrazioni con frequenza di segno opposto. Attenzione a questo punto a non confondere l'astigmatismo negativo con quello miopico e quello positivo con l'ipermetropico. Queste definizioni, proprie dell'oculistica classica, si riferiscono alla posizione della caustica rispetto al piano retinico, ma questa in aberrometria non è considerata direttamente, ma la si ricava della contemporanea valutazione del defocus.

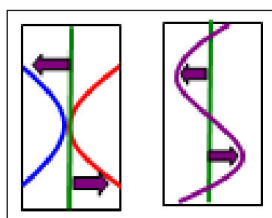


Figura 73 e 74

Nelle figure 73 e 74 sono rappresentati l'astigmatismo e la coma. Non è facile rappresentare la forma della superficie astigmatica in due dimensioni. Vengono raffigurate due parabole, una rossa e una blu, che

rappresentano i due meridiani principali, perpendicolari tra di loro, della superficie a forma di sella che rappresenta l'aberrazione astigmatica. Tutti gli altri avranno una curvatura intermedia. Come si vede i due meridiani hanno concavità in direzioni opposte, per cui la distanza può essere misurata sia in un senso che nell'altro ed infatti compaiono due frecce.

La stessa cosa vale per la coma, evidenziata nell'immagine di fianco, in questo caso è raffigurata una sola curva, che però ha prima una concavità in un senso e poi nell'altro. Anche in questo caso la distanza dal piano di riferimento può essere misurata in entrambe le direzioni.

Riassumendo possiamo dire che l'entità di una aberrazione è quantificata in micron, che rappresentano la massima distanza tra la superficie aberrata e quella piana di riferimento. Nel defocus e nell'aberrazione sferica si può anche indicare una direzione in un senso o nell'altro, per cui la misura sarà positiva o negativa a seconda dei casi. In tutte le altre aberrazioni questa distinzione non ha più senso e le distanze vengono sempre rappresentate in valori assoluti.

### La Root Mean Square (RSM)

La misura delle aberrazioni in micron in alcuni casi può non essere l'ideale. Va bene se si considerano singolarmente il defocus o la coma, ma per quantificare una superficie irregolare ricavata dalla somma di tutte le aberrazioni il sistema non è sempre adatto.

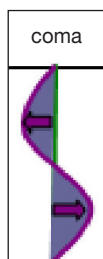


Figura 75

In questi casi per quantificare la differenza tra la superficie aberrata e il piano di riferimento si utilizza la media delle distanze di tutti i punti, espressa sempre con una misura lineare in micron. Naturalmente queste distanze devono essere misurate in valore assoluto e, come si è detto prima, i matematici in questi casi adottano lo stratagemma di elevare ogni valore al quadrato. La media sarà quindi determinata dalla "Radice quadrata della media dei quadrati", frase che tradotta in inglese diventa "Root Mean Square". Naturalmente questo valore può essere calcolato anche per una singola aberrazione, come il defocus o la coma e nelle schermate degli apparecchi si trova spesso indicata sia la misura in micron che quella espressa in RMS, che spesso presentano qualche differenza.

Il valore di RMS è anche spesso utilizzato per quantificare l'aberrazione totale di un sistema ottico.

### Qualche considerazione sulle rappresentazioni in scala di colori

Si è detto ripetutamente che le rappresentazioni cromatiche mostrate dagli aberrometri possono confondere gli oftalmologi, che sono abituati a valutare le topografie e che quindi possono essere tratti in inganno da mappe aberrometriche, che indicano delle scale di colori con un significato del tutto diverso. Se qualche oftalmologo non è convinto di poter cadere in questo tranello è opportuno fare qualche considerazione e qualche paragone riguardo a queste rappresentazioni. Nella figura 76 è mostrata una mappa corneale in rappresentazione assiale ed in scala assoluta. Chiunque la riconosce come quella di un astigmatismo secondo regola, con la classica clessidra rossa disposta verticalmente. L'asse non è proprio esattamente verticale, ma trattandosi di un occhio destro, è leggermente incli-

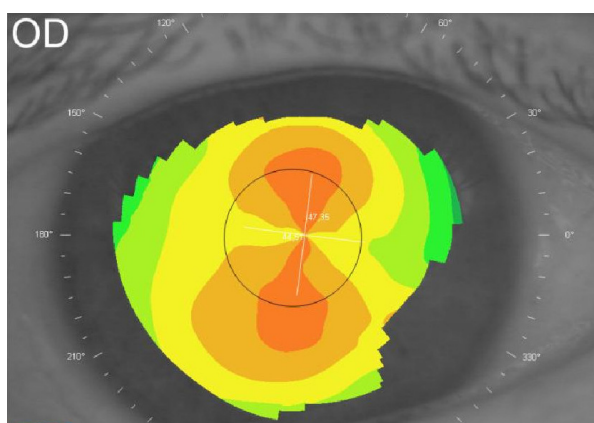


Figura 76

nato nasalmente. Osservando il gradiente di colori è facile anche valutare che si tratta di un astigmatismo abbastanza elevato, si riferisce infatti ad un occhio con circa tre diottrie cilindriche ad asse 80 170.

Ricordiamo, a questo punto, che la topografia rappresenta una mappa di curvatura in cui il rosso identifica le aree a curvatura maggiore e si va poi progressivamente diminuendo verso il blu, attraverso tutte le sfumature del giallo e del verde.

Tutti saranno anche concordi nell'affermare che non si tratta della rappresentazione della "forma" della cornea, ma solo delle sue variazioni di curvatura. Per rappresentare invece la forma, dobbiamo ricorrere ad un'altra elaborazione, che viene fornita dalla mappa altitudinale. A questo punto è utile ricordare qualcosa su questo tipo di rappresentazione, che viene ormai fornita da quasi tutti gli strumenti topografici, anche da quelli che utilizzano un disco di Placido per le rilevazioni.

Si basa sulla valutazione delle differenze altitudinali tra la superficie reale della cornea ed una ipotetica calotta sferica, con la base sul limbus ed una curvatura uguale a quella media della cornea in questione. Se la cornea considerata fosse perfettamente sferica le due superfici combacerebbero e la mappa si presenterebbe uniformemente colorata in verde. Nella valutazione di una cornea normale invece, le aree che stanno sopra la superficie di riferimento vengono colorate di giallo e di rosso, mentre quelle che stanno sotto si presentano con le varie gradazioni del blu.

Molti oftalmologi sono in grado di prevedere mentalmente l'aspetto della mappa altitudinale conoscendo quella assiale, ma forse qualcuno non si aspettava che quella rappresentata nella *figura 77* è la mappa altitudinale, in scala assoluta, dello stesso occhio raffigurato in quella precedente. Come si può osservare i colori sono invertiti, sul meridiano verticale c'è il blu mentre il rosso e il giallo occupano quello orizzontale.

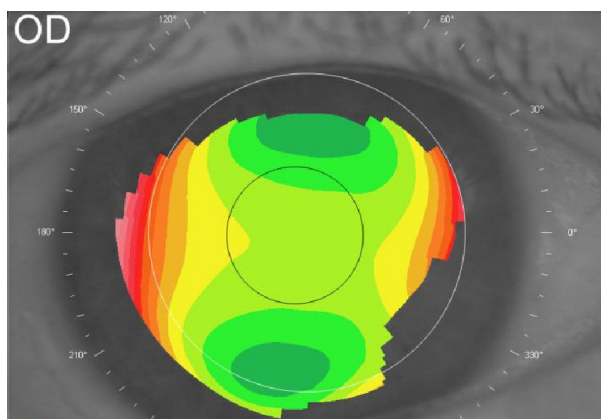


Figura 77

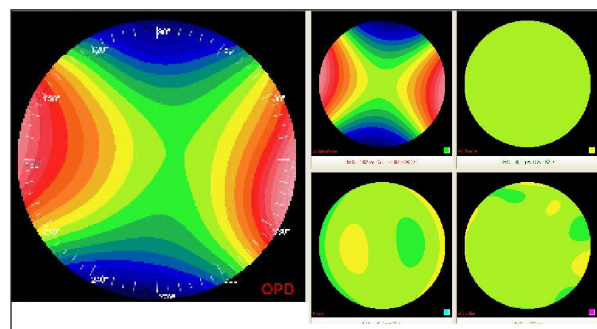


Figura 78

In effetti in una cornea astigmatica i meridiani più curvi vanno al di sotto della superficie sferica di riferimento, mentre quelli più piatti la superano in altezza e la mappa altitudinale rappresenta bene la forma torica che li caratterizza.

A questo punto è venuto il momento di chiederci come si presenta la mappa aberrometrica in scala di colori. Per non creare interferenze è stata valutata una topoaberrometria, sempre dello stesso occhio e riferita alla stessa acquisizione strumentale, in modo anche da esprimere solo quanto deriva dalla superficie anteriore della cornea, senza che ci possano essere modificazioni indotte da altri mezzi diottrici come il cristallino. L'immagine è mostrata nella *figura 78* dove, a sinistra c'è la mappa totale, quindi con la somma di tutte le aberrazioni, mentre a destra ci sono quattro immagini in cui viene fatta una scomposizione nelle varie componenti. In alto a sinistra c'è l'astigmatismo e in alto a destra l'aberrazione sferica. In basso a sinistra è rappresentata la coma, mentre in basso a destra ci sono, tutte le rimanenti messe assieme. Non le definisco aberrazioni di alto ordine perché quella sferica è rappresentata a parte. Come si vede la componente principale è quella astigmatica, c'è anche una modesta coma, mentre l'aberrazione sferica è assente e le altre sono trascurabili. In quella astigmatica la distribuzione dei colori presenta il blu sull'asse verticale e il rosso su quello orizzontale, con un aspetto molto più simile alla mappa altitudinale rispetto a quella di curvatura. Quella mostrata è quindi la rappresentazione di un astigmatismo secondo regola, che in aberrometria ha i colori blu sul meridiano più rifrangente, con una disposizione contraria a quella della clessidra astigmatica della mappa di curvatura a cui molti sono abituati. In effetti in aberrometria la distribuzione dei colori si avvicina di più a quella delle mappe altitudinali che a quelle di curvatura.

Tutto questo naturalmente è vero se si considera la rappresentazione secondo lo schema suggerito dall'OPD, mentre per il WFE la situazione è invertita.

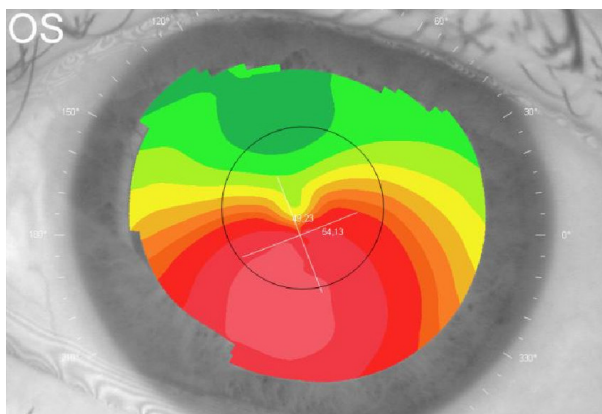


Figura 79

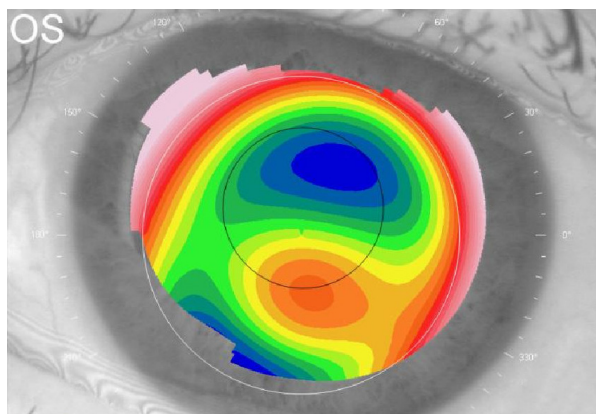


Figura 80

Non bisogna però pensare che la mappa altitudinale mostri sempre una distribuzione di colori al contrario di quella di curvatura, questo è vero nel caso dell'astigmatismo, ma le cose non stanno sempre così e per dimostrarlo esaminiamo adesso quello che può succedere in altre situazioni.

La *figura 79* mostra inequivocabilmente la topografia di una cornea affetta da cheratocono e tutti gli oftalmologi sono in grado di riconoscerla immediatamente senza difficoltà. Andiamo adesso a vedere come si presenta lo stesso occhio, in cui viene elaborata una mappa altitudinale. Questa è mostrata nella *figura 80* e, come si vede, si ha una rappresentazione del tutto differente rispetto a quella di curvatura, ma non possiamo dire che c'è una inversione dei colori. Il rosso caratterizza sempre la zona interessata dall'apice del cono, mentre la zona blu interessa la parte superiore che è anche quella meno rifrangente. Del resto se ragioniamo pensando a come si genera una mappa altitudinale i conti tornano. L'apice del cono sarà situato ad un livello superiore rispetto ad una ipotetica calotta sferica di curvatura uguale a quella media della cornea, mentre nelle zone superiori la superficie scende al di sotto e quindi viene rappresentata con colori blu. In questo caso effettivamente le aree più curve corrispondono a quelle a maggiore altitudine, ma non è sempre così e, come si è visto, nell'astigmatismo questo non si verifica. Adesso, che si dovrebbe avere acquisita una certa dimestichezza, osservando la mappa altitudinale si può provare ad indovinare quali saranno le aberrazioni che affliggono quest'occhio. Come nel caso precedente è stata elaborata una mappa topoaberrometrica, sul medesimo occhio sempre sulla base della stessa acquisizione. La *figura 80* mostra la mappa totale, con tutte le aberrazioni, mentre nella figura a lato c'è la consueta scomposizione nelle varie componenti. Come ci aspettava, la figura in basso a sinistra mostra una consistente componente

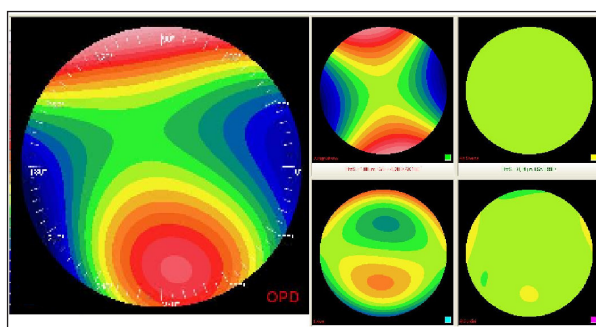


Figura 81

di coma, in linea col fatto che si tratta di un occhio affetto da cheratocono. Notiamo anche che c'è anche una discreta quota di astigmatismo, non sempre così importante in questi occhi. L'aberrazione sferica è assente, mentre le altre sono trascurabili.

Ricordiamo a questo punto che si tratta di mappe topoaberrometriche, utilizzate per poter mostrare le diverse rappresentazioni riferite sempre alla stessa acquisizione strumentale e che mostrano le aberrazioni della sola superficie corneale. Eseguendo una aberrometria vera e propria si esaminerebbe il fronte d'onda determinato dall'intero obiettivo oculare e l'aspetto potrebbe essere un po' diverso, per la concomitante comparsa di altre aberrazioni indotte ad esempio dal cristallino. Non dimentichiamo comunque che in media il 70-80% del totale delle aberrazioni è determinato dalla superficie anteriore della cornea. Anche qui si può osservare come l'aberrazione di coma, la più caratteristica di questo tipo di occhi, mostri una mappa che ricorda abbastanza quella altitudinale da cui sostanzialmente la topoaberrometria deriva.

Lo scopo di quest'ultima descrizione era comunque quella familiarizzare con le mappe cromatiche che esprimono le aberrazioni in modo di sviluppare una certa esperienza con la distribuzione dei colori, anche in relazione a quello che avviene con le topografie.

## Una tecnica con tante virtù e qualche limite

Per un oftalmologo l'astigmatismo oculare è determinato dalla differenza tra il meridiano più rifrangente e quello meno rifrangente, che si assume che siano perpendicolari; quando non lo sono si parlerebbe di "astigmatismo irregolare", frase che spesso nasconde la presenza di altre aberrazioni, che non vengono considerate. Si distingue in miopico, ipermetropico e misto e si corregge con lenti cilindriche di potere uguale alla differenza diottrica dei due meridiani. Un astigmatismo di due diottrie è sempre di due diottrie, indipendentemente dalla pupilla, che potrà in effetti determinare differenze nell'acutezza visiva naturale condizionando le dimensioni della caustica provocata dal difetto, vale a dire della conoide di Sturm. Che quest'ultima aumenti in proporzione alle dimensioni della pupilla è cosa risaputa e lo dimostra l'uso del forame stenopeico nella pratica clinica, ma la quantificazione in diottrie non ne viene influenzata.

Un aberrometro invece ricostruisce le aberrazioni partendo dalle deformazioni che l'obiettivo determina nei confronti dei raggi luminosi o, se vogliamo del fronte d'onda, e da qui ne ricostruisce la forma e ne esegue una quantificazione, non più in diottrie, ma in micron o attraverso la RMS. È come se si esaminasse una conoide di Sturm, o una qualunque altra caustica deformata, e da qui si risalisse all'aberrazione corrispondente e se ne determinasse la misura.

Il modo di lavorare degli aberrometri segue quindi un cammino opposto a quello con cui la mente degli oftalmologi è abituata a ragionare e spiega perché la quantificazione di ogni singola aberrazione è condizionata e dipendente dalle dimensioni della pupilla. La dipendenza dalle dimensioni del diaframma rap-

presenta uno dei principali limiti dell'aberrometria e quello che fa più spesso nascere incomprensioni e perplessità in chi si accinge ad utilizzarlo per le prime volte. Non a caso c'è qualcuno, come il Prof. Larry Thibos dell'Università dell'Indiana, che sta sviluppando metodi per quantificare le aberrazioni come "defocus equivalente", misurato in diottrie, che si avvicinano di più al modo di pensare degli oftalmologi e sono meno dipendenti dalla grandezza della pupilla.

Le mappe aberrometriche sono quindi dipendenti dalla grandezza del forme pupillare al momento dell'acquisizione, che può variare da un occhio all'altro o anche nello stesso occhio in momenti differenti, senza possibilità di standardizzarlo. Le topoa-berrometrie sono le uniche che possono mostrare le aberrazioni selezionando la misura della pupilla, ma queste non misurano direttamente il fronte d'onda, ma lo "deducono" dalla forma dell'obiettivo, anzi solo di quella della superficie anteriore della cornea. La presenza di accomodazione può interferire nelle misure aberrometriche. E' chiaro che, se durante l'acquisizione c'è una contrazione del cristallino, l'apparecchio, nel misurare il fronte d'onda, registra delle modificazioni. Soprattutto si verifica un defocus nel senso di una miopizzazione, ma anche il resto viene influenzato soprattutto con un incremento dell'aberrazione sferica negativa. Quest'ultima, di cui si è già accennato in precedenza e che potrebbe avere qualche influenza sul meccanismo dell'accomodazione, prevede necessariamente una modificazione della forma di almeno una delle facce del cristallino che aumenterebbe la propria prolatura, non limitandosi ad un semplice incremento della curvatura di base. Se oggi comunque conosciamo questo meccanismo è merito proprio dell'aberrometria.



## Per saperne di più

**[http://research.opt.indiana.edu/Library/VSIA/VSIA-2000\\_taskforce/TOPS4\\_2.html](http://research.opt.indiana.edu/Library/VSIA/VSIA-2000_taskforce/TOPS4_2.html)**

Nella trattazione precedente non è stato descritto esattamente il procedimento matematico con cui si ricavano i polinomi di Zernike, anche perché è un po' troppo complicato e tutto sommato non indispensabile per gli scopi che ci si erano prefissi. Se comunque qualcuno si sente in grado di affrontare il problema e ha voglia di cimentarsi, il link permette di collegarsi ad un sito in cui il procedimento è spiegato abbastanza dettagliatamente. C'è anche un elenco di tutte le formule dei polinomi fino al settimo ordine.

**<http://www.optics.arizona.edu/jcwyant/zernikes/zernikepolynomials.htm>**

Collega ad un sito abbastanza interessante e curioso. Vi si trova un elenco di tutti i polinomi di Zernike e ci sono anche tre articoli in cui c'è una trattazione delle formule matematiche. Si possono poi visualizzare le mappe tridimensionali e le animazioni delle aberrazioni, scorrendo verticalmente lungo la piramide di Zernike. Vengono mostrati anche gli stereogrammi di tutte le aberrazioni. Ci sono anche le immagini delle mappe tridimensionali viste da tutte le angolazioni.

**<http://www.mrao.cam.ac.uk/~bn204/oof/zernikes.html#c-code-for-generating-zernike-polynomials>**

In questo caso vengono mostrate immagini delle sfocature di un punto in relazione ad ogni singola aberrazione calcolate con un apposito software.

**<http://www.telescope-optics.net/index.htm>**

Questo è un sito dedicato a chi si interessa di telescopi. È impressionante comunque come gli argomenti siano gli stessi. C'è anche l'ultima parte che è dedicata all'occhio umano

**[http://www.optikon.com/it/articles/keratron\\_029/media/Atti%20del%20SOI%20-%202004%20-%20Principi%20Aberrometria%20di%20Superficie.pdf](http://www.optikon.com/it/articles/keratron_029/media/Atti%20del%20SOI%20-%202004%20-%20Principi%20Aberrometria%20di%20Superficie.pdf)**

**[http://www.optikon.com/it/articles/AICCER2002aberrometriatopografica/1\)%20AICCER%202002%20Mattioli%20\(Aberrometria%20topografica\).PDF](http://www.optikon.com/it/articles/AICCER2002aberrometriatopografica/1)%20AICCER%202002%20Mattioli%20(Aberrometria%20topografica).PDF)**

**[http://www.optikon.com/it/articles/TheAberrometers/13\)%20TheAberrometers\\_2003\\_Mattioli%20corneal\\_ITA.pdf](http://www.optikon.com/it/articles/TheAberrometers/13)%20TheAberrometers_2003_Mattioli%20corneal_ITA.pdf)**

Si tratta di tre link che collegano a lavori dell'Ing. Mattioli, che parlano dell'argomento. Nel primo è possibile visualizzare in formato PDF la monografia "Principi di aberrometria di superficie", che tratta della topoaberrometria. Con il successivo si evidenzia la presentazione tenuta dallo stesso Autore al congresso AICCER di Roma del 2002 "Aberrometria Topografica".

Il terzo si riferisce all'articolo "La Topografia Corneale e la Aberrometria" che tratta prima la topografia corneale, per poi descrivere la topoaberrometria. E' abbastanza interessante anche per chi volesse approfondire concetti di topografia come le mappe assiali, istantanee e altitudinali

**<http://www.matematica.it/impedovo/articoli/La%20retta%20di%20regressione.pdf>**

Questo è un sito per chi si interessa di matematica, dove si tratta in maniera abbastanza affrontabile il problema della retta di regressione lineare. Si descrive di cosa si tratta e vengono illustrati i metodi per ottenerla. Viene anche illustrato il concetto di coefficiente di correlazione lineare.

## Bibliografia

BEN C. PLATT, PhD; Roland Shack, PhD History and Principles of Shack-Hartmann Wavefront Sensing Journal of Refractive Surgery Volume 17 *September/October 2001*

MICHAEL MROCHEN, PhD; MAIK KAEMMERER, PhD; PETER MIERDEL, PhD; HANS-EBERHARD KRINKE, PhD; THEO SEILER, MD, PhD Principles of Tscherning Aberrometry Journal of Refractive Surgery Volume 16 *September/October 2000*

MAIK KAEMMERER, PhD; MICHAEL MROCHEN, PhD; PETER MIERDEL, PhD; HANS-EBERHARD KRINKE, PhD; THEO SEILER, MD, PhD Clinical Experience With the Tscherning Aberrometer Journal of Refractive Surgery Volume 16 *September/October 2000*

XU CHENG, MD, MS, NIKOLE L. HIMEBAUGH, OD, PETE S. KOLLBAUM, OD, FAAO, LARRY N. THIBOS, PhD, FAAO, AND ARTUR BRADLEY, PhD Validation of a Clinical Shack-Hartmann Aberrometer Optometry and Vision Science, Vol. 80, No. 8, *August 2003*

DAVID ZADOK, MD, YAIR LEVY, MD, ORI SEGAL, MD, YANIV BARKANA, MD, YAIR MORAD, MD, ISAAC AVNI, MD Ocular higher-order aberrations in myopia and skiascopic wavefront repeatability Journal of Cataract and refractive Surgery Volume 31, Issue 6, Pages 1128-1132 (*June 2005*)

E. P. GOODWIN AND J. C. WYANT, Field Guide to Interferometric Optical Testing, SPIE Press, Bellingham, WA (*2006*).

SALMON TO, VAN DE POL C Normal-eye Zernike coefficients and root-mean-square wavefront errors J. Cataract Refract Surg. *2006 Dec;32(12):2064-74.*

APPLEGATE RA, BALLENTINE C, GROSS H, SARVER EJ, SARVER CA Visual acuity as a function of Zernike mode and level of root mean square error Optom Vis Sci. *2003 Feb; 80(2):97-105.*

THOMAS O. SALMON, OD, PhD, CORINA VAN DE POL, OD, PhD Normal-eye Zernike coefficients and root mean square wavefront errors J CATARACT REFRACT SURG - VOL 32, *DECEMBER 2006*

LARRY N. THIBOS, PhD Wavefront Data Reporting and Terminology Journal of Refractive Surgery Volume 17 *September/October 2001*

MICHIEL DUBBELMAN, Victor Arni D. P. Sicam, Rob G. L. van der Heijde, The contribution of the posterior surface to the coma aberration of the human cornea Journal of Vision (2007) 7(7):10, 1-8

GONZALO MUNOZ, MD, PhD, FEBO, Cesar Albarran-Diego, OD, Robert Montes-Mico , OD, PhD, Antonio Rodriguez-Galietero, MD, PhD, FEBO, Jorge L. Alio , MD, PhD Spherical aberration and contrast sensitivity after cataract surgery with the Tecnis Z9000 intraocular lens J Cataract Refract Surg 2006; *32:1320-1327*

JAMES C. WYANT, KATHERINE CREATH, Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology Applied Optics and Optical Engineering, *VOL. XI*

